Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 26, n. 1, p. 49-51 (2004)
www.sbfisica.org.br

Comparação entre a mecânica relativista e a mecânica newtoniana

(A comparison between the relativistic and the Newtonian mechanics)

G.F. Leal Ferreira

Instituto de Física de São Carlos, D.F.C.M., São Carlos, SP, Brasil.

Recebido em 7/5/03; Manuscrito revisado recebido em 28/11/03; Aceito em 5/1/04

Comparação entre as mecânicas Relativista e Newtoniana é realizada num dado sistema de coordenadas, sem nenhuma preocupação com eventuais outros sistemas de coordenadas inerciais em movimento relativo, o que permite percepção mais direta das diferenças entre elas. Toma-se como ponto de partida a equivalência entre massa e energia e chega-se, como anteriormente realizado por T. Theodorsen, à correta dependência entre massa e velocidade.
Palvras-chave: Mecânica Clássica, Mecânica Relativística, equivalência massa-energia.

A comparison between the relativistic and the Newtonian mechanics is carried out inside a single coordinate system without reference to other coordinate systems moving relatively to ours. This allows a more direct understanding of the differences between the two mechanics. As a starting point, the equivalence between mass and energy is assumed and taking the route suggested by T. Theodorsen, the correct dependence of the mass on the velocity is obtained.
Keywords: Classical Mechanics, Relativistic Mechanics, mass-energy equilavence.

1. Introdução

A Teoria da Relatividade, como usualmente apresentada, dá especial ênfase às mudanças de sistemas de coordenadas, em razão de suas origens. Mesmo um dos seus principais resultados dinâmicos, o da variação da massa com a velocidade, está, na maioria das apresentações, ligado, direta ou indiretamente [1,2], àquelas trocas de sistema de coordenadas. Isto é inconveniente já que as modificações parecem assim se dever unicamente a mudanças de sistemas de coordenadas, quando, na prática, elas ocorrem aquí mesmo, nos nossos laboratórios. E o presente artigo não tem nada de original a não ser esquecer outros sistemas de coordenadas e dar ênfase às mudanças entre a formulação newtoniana, em que a massa é constante (e o conceito de energia é acessório), e a relativista em que tal não ocorre. Para isto, estaremos nos valendo de formulação apresentada em [3], cujo ponto de partida é o da equivalência entre massa e energia, como defendido por Sandin [4] na controvérsia sobre o significado de m na famosa relação $E = mc^2$, se constante ou variável, discutido em [5]. Em palavras mais simples, se a 'inércia' depende ou não da velocidade. Como operamos num único sistema de coordenadas, constatamos que m depende de v, sem outras filosofias.

2. Mecânica newtoniana

A Mecânica Newtoniana da massa pontual constante, m, é dada simplesmente por

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}, \quad \text{com}\, \vec{p} = m\vec{v}. \qquad (1)$$

sendo $\vec{F}$ a força, $\vec{p}$ o momento, $\vec{v}$ a velocidade, e t o tempo. O conceito de energia é na Mecânica Newtoniana um conceito derivado e é obtido da Eq. 1 multiplicando-a escalarmente por $\vec{v}$

$$dW = \vec{F}.\vec{v}dt = \vec{F}.d\vec{s} = m\vec{v}.d\vec{v} = \frac{m}{2}d\vec{v}^{\,2} = dE_c \qquad (2)$$

em que W é o trabalho de $\vec{F}$, $d\vec{s}$ o deslocamento em dt e E_c a energia cinética. Alternativamente, o conceito de energia, de alto teor físico, é usado como primitivo nas formulações lagrangiana e hamiltoniana, completado pelo conceito de energia potencial.

2.1. Mecânica newtoniana da massa variável

A Mecânica Newtoniana também sabe tratar sistemas em que a massa é variável. Em especial, se a massa é adicionada ao sistema do repouso, a Eq. 1 é ainda válida com $m = m(t)$. Já a Eq. 2 tornar-se-ia

$$dW = \vec{F}.\vec{v}dt = \vec{F}.d\vec{s} = m(t)\vec{v}.d\vec{v} + \vec{v}^{\,2}\,dm(t), \qquad (3)$$

dW não sendo mais uma diferencial exata da energia cinética, como é no caso em que a massa é constante. Temos para dE_c,

$$dE_c = \frac{d(m(t)v^2)}{2dt} = m(t)\vec{v}.d\vec{v} + \frac{v^2\,dm}{2} < dW, \qquad (4)$$

isto é, a variação da energia cinética é menor do que o trabalho: há algo de irreversível no sistema de massa variável Newtoniano. Comparando as Eqs. 3 e 4, vê-se que a perda de energia mecânica diferencial é $v^2 dm(t)/2$.

Enviar correspondência para G.F. Leal Ferreira. E-mail: guilherm@if.sc.usp.br.

3. Mecânica relativista

Os primeiros desvios à lei de Newton, Eq. 1, foram observados nas experiências de Kaufmann [5], em que a massa dos elétrons, acelerados em campos elétricos e magnéticos, mostrava ser variável com a velocidade. Portanto, devemos esperar, em princípio, não mais uma única equação como no caso newtoniano, mas duas equações, de forma a estabelecer como se dá aquela variação da massa com a velocidade. Para isso, seguiremos [3], que parte da equivalência entre massa $m(v)$ e energia $E(v)$ [5]

$$E(v) = m(v)c^2 \tag{5}$$

A Eq. 1 será agora [3]

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}\vec{p}, \quad \text{com } \vec{p} = \frac{E(v)}{c^2}\vec{v} \tag{6}$$

sendo c a velocidade da luz. Segundo ainda [3], vamos impor que o trabalho da força aplicada seja igual ao aumento da energia E:

$$dW = \vec{F}.\vec{v}dt = \vec{F}.d\vec{s} = dE(v) \tag{7}$$

Notemos agora que se multiplicarmos a Eq. 6 escalarmente por $\vec{v}$ e usarmos a Eq. 5, obteremos

$$c^2 dE = \vec{v}.d(E\vec{v}) \tag{8}$$

equação que pode ser integrada multiplicando-se os dois membros por E, fornecendo a dependência de E com a velocidade

$$E(v) = \frac{E_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{9}$$

sendo E_0 a energia (ou equivalentemente a massa) de repouso. Portanto, a admissão da Eq. 5, ou seja o da equivalência entre a massa e energia, leva à relação correta entre massa relativista e velocidade.

Voltando à Eq. 7, suporte da Eq. 9, ela e as Eqs. 6 se constituem nas equações da Mecânica Relativista. Portanto, a mudança significativa operada na Mecânica Newtoniana é a incorporação do trabalho realizado sobre a massa (energia) à própria massa (energia), de acordo com a Eq. 7, tornando o trabalho dW uma diferencial exata.

4. A Hamiltoniana e a Lagrangiana relativistas

Mostraremos agora que as equações da formulação relativista da seção anterior levam às expressões corretas da hamiltoniana e lagrangiana relativista.

Se a força deriva de um potencial $U(\vec{x})$,

$$\vec{F}.d\vec{s} = -dU(\vec{x}), \tag{10}$$

e a Eq. 7 se escreve

$$d(E(v) + U(\vec{x})) = 0, \tag{11}$$

definindo a energia total H,

$$H = E(v) + U(\vec{x}), \tag{12}$$

H, sendo a energia total, deve ser a hamiltoniana quando expresso em função de p_i,e x_i,componentes de $\vec{p}$, e de $\vec{x}$ (lembremos que a Eq. 6 define o momento em função de $E(v)\vec{v}$). Sendo H(x_i, p_i), devemos então ter

$$\dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \text{e} \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i} \tag{13}$$

em que o ponto significa derivada em relação ao tempo. A equação em $\dot{p}_i$ reproduz a Eq. 6. Para analisar a equação em $\dot{x}_i$, vamos primeiro supor que estamos em uma dimensão. Teríamos

$$\dot{x} = v = \frac{c^2 p}{E} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{\partial E}{\partial p} = \frac{dE}{dp}, \tag{14}$$

em que as Eqs. 6, 12 e13 foram usadas. O terceiro e o sexto termos formam a equação diferencial

$$\frac{c^2 p}{E} = \frac{dE}{dp}, \tag{15}$$

que integrada dá

$$E^2 = c^2 p^2 + E_0^2, \tag{16}$$

sendo E_0 a energia de repouso. A Eq. 16 é uma conhecida relação em dinâmica relativista, confirmando que H, considerado dependente de x e p, é de fato a hamiltoniana.

No caso geral, tridimensional, voltando à Eq. 14, teríamos

$$\dot{x}_i = v_i \frac{c^2 p_i}{E} = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{dE}{dp}\frac{\partial p}{\partial p_i}, \tag{17}$$

em que se usa o fato de E ser função de p, módulo de $\vec{p}$. Elevando ao quadrado e somando nas componentes, chega-se à Eq. 15 e daí à Eq. 16, levando em conta que os $\partial p/\partial p_i$ são coeficientes angulares.

A lagrangiana $L(x_i, v_i)$ é obtida pelo procedimento usual, [2].

$$L = \sum p_i \dot{x}_i - H = -\left(E_0\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + U(\vec{x})\right) \tag{18}$$

em que empregamos as Eqs. 6, 9 e 12.

5. Uma comparação

Somos tentados a comparar a Mecânica Relativista com a newtoniana de massa varíável, tratada na seção 2.1. Como a diferença entre elas está em que o trabalho nesta última não é reversível, Eq. 4, poderíamos especular, na tentativa de dar ao tratamento relativista a mesma interpretação que no newtoniano, que o trabalho perdido (ver abaixo da Eq. 4) $v^2 dm(v)/2$ no caso newtoniano, tornar-se-ia, no relativista, a diferencial de uma espécie de energia interna que iria sendo 'absorvida'. Nessa linha de raciocínio, a energia cinética continuaria sendo $m(v)v^2/2$ e a energia interna total seria igual à diferença entre a energia $E(v)$, Eq. 9, e a energia cinética $m(v)v^2/2$, igual a $E(v)(1 - v^2/2c^2)$. Não há, porém, indícios de que este racionalismo tenha apoio na realidade, para a qual E - E_0 parece ser a energia cinética da massa pontual em movimento, como usualmente admitido [1,2].

6. Comentários finais

O que se procurou fazer aquí foi apresentar a Mecânica Relativista, num inespecificado sistema de coordenadas, sem nenhuma preocupação, como em [1,2], com a existência de outros sistemas. A consistência dos resultados endossa o ponto de vista de Sandin [4], admitido de forma geral na Eq. 5.

Agradecimento

O autor agradece ao colega Dr. René Armando Moreno a leitura de uma versão anterior do presente trabalho e os conselhos que a acompanharam.

Referências

[1] A.P. French, *Special Relativity* (W.W. Norton, 1968), caps. 1 e 6.

[2] H. Goldstein, *Classical Mechanics* (Addison-Wesley, 1951), cap.6.

[3] T. Theodorsen, Galilean Electrodynamics **6**, 63 (1995).

[4] T.R. Sandin, Amer. J. Phys. **59**, 1032 (1991).

[5] Nivaldo A. Lemos, Rev. Bras. Ens. Física. **23**, 3 (2001).