Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 32, n. 3, 3308 (2010)
www.sbfisica.org.br

Constante de Boltzmann

(Boltsmann's constant)

Wilson Lopes[1]

Universidade Guarulhos, Guarulhos, SP, Brasil
Recebido em 6/11/2009; Aceito em 1/2/2010; Publicado em 15/2/2011

Estabeleceu-se, neste trabalho, uma equação barométrica para relacionar as grandezas físicas da baixa atmosfera terrestre: pressão, altitude e temperatura, com a razão entre a constante de Boltzmann e a massa média das moléculas dos gases constituintes. Para uma altitude geopotencial não superior a 33 km e considerando-se a massa média da molécula 4,809 x 10^{-26} kg, obteve-se um valor médio para a constante de Boltzmann de 1,373 x 10^{-23} J/K.
Palavras-chave: baixa atmosfera, equação de Stevin, constante de Boltzmann.

In this work, a barometric equation was established to relate the physical quantities of the low atmosphere: pressure, altitude, and temperature with the ratio between the Boltzmann's constant and the medium mass of molecules of the constituent gases. For geopotential altitude not superior to 33 km and assuming the medium mass of the molecule 4,809 x 10^{-26} kg, a medium value was obtained for Boltzmann's constant of 1,373 x 10^{-23} J/K.
Keywords: low atmosphere, Stevin's equation, Boltzmann's constant.

1. Introdução

No início do século XX, a constante de Boltzmann ainda não tinha um valor bem definido, bastando-se citar dois episódios significativos da história da física: Max K.E. Plank, em 1901, publicou um trabalho sobre a radiação do corpo negro usando, para essa constante, o valor k = 1,34 x 10^{-23} J/K [1] e A. Einstein, em 1905, equacionando o movimento browniano, obteve para o número de Avogadro N = 2,1 x 10^{23} mol^{-1}, concluindo ser um valor aceitável em comparação com outros valores obtidos por outros métodos de pesquisa [2]. Admitindo-se o valor para a constante dos gases R = 8,31 J/(K.mol), chega-se a conclusão que Einstein estimava a constante de Boltzmann em k = 3,96 x 10^{-23} J/K.

Na atualidade, a maioria dos trabalhos científicos grafa o número de Avogadro e a constante dos gases (neste trabalho, com quatro algarismos significativos), respectivamente, N = 6,022 x 10^{23} mol^{-1} e R = 8,314 J/(K.mol), resultando para a constante de Boltzmann $k = R/N$ = 1,381 x 10^{-23} J/K.

Pretende-se determinar, através de uma equação barométrica apropriada, a razão entre a constante de Boltzmann e a massa molecular média das moléculas que constituem a baixa atmosfera terrestre com valores da pressão, altitude geopotencial e temperatura, tabelados no livro de J.T. Houghton e, a partir dessa razão, determinar o valor da constante de Boltzmann.

Na baixa atmosfera terrestre, a partir do nível do mar, é fato conhecido que, à medida que a altitude geométrica[2] aumenta, a temperatura diminui a uma taxa da ordem de ∂T/∂z $\approx$ - 6,5 K/km: essa região é chamada de troposfera. Continuando a aumentar a altitude geométrica, atinge-se uma região em que as variações da temperatura com a altitude são muito pequenas, no entorno de ∂T/∂z = 0: essa região, considerada o topo da troposfera e início da estratosfera, é chamada de tropopausa. Alcançada a estratosfera, a temperatura aumenta com a altitude, $\partial T/\partial z > 0$ [3]. As grandezas físicas, pressões, altitudes geométricas e temperaturas foram escolhidas entre estas três regiões

[1] E-mail: lopes.wilson@gmail.com.

[2] A palavra "altitude"será grafada como "altitude geométrica"para distingui-la de "altitude geopotencial".

da baixa atmosfera terrestre e as altitudes geopotenciais, consideradas neste trabalho, não superam os 33 km (conforme a Tabela 2).

Nessas três regiões da atmosfera terrestre, praticamente não há variações nas percentagens dos gases que a compõem e, para uma atmosfera considerada seca,[3] a massa molar média é, aproximadamente, M = 2,896 x 10^{-2} kg/mol. Dividindo-se esse valor pelo número de Avogadro, N = 6,022 x 10^{23} mol^{-1}, obtém-se a massa molecular média das moléculas que constituem a baixa atmosfera terrestre, a saber: $m = M/N$ = 4,809 x 10^{-26} kg [4].

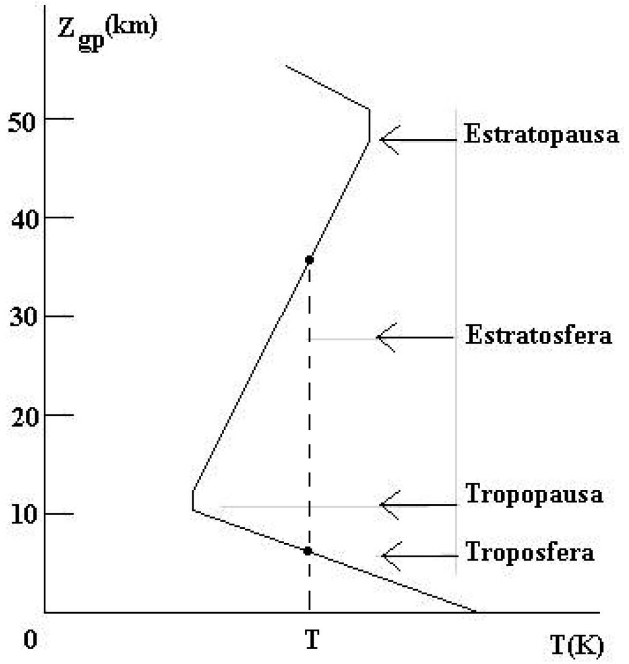

Figura 1 - As camadas atmosféricas de interesse, neste trabalho, são: a troposfera, a tropopausa e a estratosfera. Os pontos indicados têm coordenadas termodinâmicas $P_1(p_1;\ Z_{gp1};\ T)$ e $P_2(p_2;\ Z_{gp2};\ T)$, em que p_1 e p_2 são pressões, Z_{gp1} e Z_{gp2} são altitudes geopotenciais e T é temperatura.

As posições dos pontos $P_1(p_1;\ Z_{gp1};\ T)$ e $P_2(p_2;\ Z_{gp2};\ T)$ (ver a Fig. 1), tabeladas no livro de Houghton [5], estão medidas em altitudes geopotenciais. Houve, portanto, a necessidade de se estabelecer uma equação que convertesse essas altitudes em altitudes geométricas.

2. Equação de conversão entre altitude geopotencial e altitude geométrica

O trabalho para elevar, em relação ao nível do mar e na latitude de 45°, uma massa m até a altitude geopotencial Z_{gp} é definido por: $\Delta\tau = m.\ \bar{g}_0.Z_{gp}$. O mesmo trabalho é realizado para elevar a mesma massa m até a altitude geométrica z, com a aceleração da gravidade variando com a altitude geométrica e com a latitude: $\Delta\tau = m\int_{z=0}^{z} g_{\lambda z}dz$. Igualando-se esses trabalhos e evidenciando-se a equação resultante na altitude geopotencial, obtém-se

$$Z_{gp} = \frac{1}{\bar{g}_0}\int_{z=0}^{z} g_{\lambda z}.dz \qquad (1)$$

em que $\bar{g}_0 = 9,800\ m/s^2$ é um valor usual da aceleração da gravidade nos livros didáticos de física, escolhido[4] para que as altitudes geopotenciais fossem compatíveis com as altitudes geométricas [5].

Na Eq. (1), $g_{\lambda z}$ representa a aceleração da gravidade à latitude λ e à altitude geométrica z, dada por

$$g_{\lambda z} \approx g_0(1+\beta.sen^2\lambda)(1-2z/R_T) \qquad (2)$$

em que g_0 = 9,7803 m/s^2 representa a aceleração da gravidade no equador terrestre e no nível do mar; β = 5,300 x 10^{-3} é um fator numérico que leva em conta a rotação terrestre, em torno de seu eixo e de seu achatamento polar; R_T = 6,371 x 10^6 m é o raio médio da Terra e z a altitude geométrica [6].

Substituindo-se a Eq. (2) na Eq. (1) e integrando-se, vem

$$Z_{gp} \approx \frac{g_0\left(1+\beta.sen^2\lambda\right)}{\bar{g}_0}(z - z^2/R_T) \qquad (3)$$

em que Z_{gp} representa a altitude geopotencial à latitude λ e à altitude geométrica z.

A partir da Eq. (3), obtém-se a seguinte equação do segundo grau

$$z^2 - R_T.z + C.Z_{gp} \approx 0 \qquad (4)$$

em que $C = \bar{g}_0.R_T/[g_0(1+\beta.sen^2\lambda)]$ se mantém constante à latitude λ.

A raiz da equação do segundo grau, de interesse no problema, que fornece a altitude geométrica em função da altitude geopotencial, é dada por

$$z \approx \frac{R_T - \sqrt{R_T^2 - 4CZ_{gp}}}{2} \qquad (5)$$

[3] O vapor d'água poderia alterar ligeiramente o percentual dos gases constituintes da baixa atmosfera. Contudo, em relação às altitudes geopotenciais consideradas, praticamente, o vapor d'água está ausente.

[4] Houghton sugere o valor $\bar{g}_0$= 9,807 m/s^2. Mas, neste trabalho, com $\bar{g}_0$ = 9.800 m/s^2 obteve-se uma melhor precisão na conversão de altitudes geopotenciais em altitudes geométricas

Tabela 1 - Na parte superior, encontram-se as altitudes geopotenciais, relacionadas com as altitudes geométricas e latitudes, apresentadas por Houghton; na inferior, os valores das mesmas grandezas físicas calculados com a Eq. (5).

	Alt. Geopotencial Z_{gp} (km)				
λ^0	10	20	30	40	50
0	10,036	20,104	30,204	40,336	50,500
30	10,023	20,077	30,163	40,282	50,432
45	10,009	20,050	30,123	40,228	50,465
60	9,996	20,024	30,083	40,174	50,297
90	9,983	19,997	30,043	40,120	50,229

	Alt. Geopotencial Z_{gp} (km)				
λ^0	10	20	30	40	50
0	10,036	20,104	30,204	40,336	50,501
30	10,023	20,077	30,163	40,282	50,434
45	10,009	20,050	30,123	40,229	50,366
60	9,996	20,024	30,083	40,175	50,299
90	9,983	19,997	30,043	40,122	50,233

3. Equação barométrica relacionando as grandezas físicas da baixa atmosfera com a constante de Boltzmann

Considerando-se uma atmosfera em repouso ou movimentando-se com velocidade vetorial constante, relação a um sistema inercial, é válida a equação de Stevin

$$\frac{dp}{dz} = -\rho . g_{\lambda Z} \tag{6}$$

em que ρ representa a massa específica da atmosfera terrestre à altitude geométrica z [4].

Na Eq. (6), a massa específica da atmosfera varia com a pressão p e temperatura absoluta T de acordo com a equação

$$\rho = \frac{mp}{kT} \tag{7}$$

em que m representa a massa média da molécula na baixa atmosfera e k é a constante de Boltzmann [4].

Substituindo-se as Eqs. (2) e (7) na Eq. (6), obtém-se a seguinte equação diferencial

$$\frac{dp}{p} \approx -\frac{m.g_0}{kT}(1 + \beta .sen^2\lambda)\,(1 - 2z/R_T) \tag{8}$$

Integrando-se a Eq. (8), entre o par de pontos: $P_1(p_1;\ z_1;\ T)$ e $P_2(p_2;\ z_2;\ T)$, com a condição de ser a temperatura T constante,[5] obtém-se

$$\ln\frac{p_2}{p_1} \approx -\frac{m.g_0}{kT}(1+\beta .sen^2\lambda)[\,(z_2-z_2^2/R_T)-(z_1-z_1^2/R_T)] \tag{9}$$

Evidenciando-se, na Eq. (9), a razão entre a constante de Boltzmann e a massa média das moléculas que compõem a baixa atmosfera, vem

$$k/m \approx \frac{g_0}{T.\ln(p_1/p_2)}\,(z_2 - z_1)\,(1 - \frac{z_1 + z_2}{R_T}) \tag{10}$$

Conhecidas as pressões p_1 e p_2, respectivamente, nas altitudes geométricas z_1 e z_2 e à temperatura $T \approx (T_1 + T_2)/2$, com o auxílio da Eq. (10), foram obtidos os quinze valores da razão entre a constante de Boltzmann e a massa molecular média das moléculas constituintes da baixa atmosfera terrestre (ver a última coluna da Tabela 2), de valor médio k/m = 285,5 J/(kg.K). Considerando-se a massa molecular média das moléculas m = 4,809 x 10 $^{-26}$ kg, pôde-se estimar, neste trabalho, o valor médio da constante de Boltzmann: k = 285,5.m = 285,5 . 4,809 x 10^{-26} = 1,373 x 10^{-23} J/K.

4. Conclusão

As tabelas encontradas na literatura científica para os pares de pontos, $P_1(p_1;\ Z_{gp1};\ T)$ e $P_2(p_2;\ Z_{gp2};\ T)$, foram fornecidas em altitudes geopotenciais. Sendo assim, houve a necessidade de transformá-las em altitudes geométricas, $P_1(p_1;\ z_1;\ T)$ e $P_2(p_2;\ z_2;\ T)$, através da Eq. (5). Pode-se ver, através da Tabela 1, que essa equação de conversão se revelou conveniente até a altitude geopotencial de 50 km. Assim, com segurança, a Eq. (5) foi usada nessa conversão (nas colunas 2 e 6, da Tabela 2, Z_{gp1} e Z_{gp2} são as altitudes geopotencias que foram transformadas, respectivamente, nas altitudes geométricas z_1 e z_2).

A Eq. (10) relaciona a razão entre a constante de Boltzmann e a massa média das moléculas que constituem a baixa atmosfera terrestre com as grandezas físicas: temperatura em kelvin (K), pressão em milibar (mb) e altitudes em quilômetros (km). Como essa equação exige que a temperatura seja constante, teve-se o cuidado de se escolher pares de pontos, $P_1(p_1;\ z_1;\ T)$ e $P_2(p_2;\ z_2;\ T)$, em que o módulo da variação de temperatura não superasse 1,0 K (ver as temperaturas T_1 e T_2, respectivamente, nas colunas 1 e 5 da Tabela 2). A temperatura escolhida "como constante", para os cálculos, foi a média aritmética entre essas duas temperaturas.

[5] As temperaturas T_1 e T_2, dos pontos escolhidos $P_1(p_1;\ z_1;\ T_1)$ e $P_2(p_2;\ z_2;\ T_2)$, deveriam ser iguais a T por exigência da equação diferencial (8) que foi integrada obedecendo a essa condição. Não havendo essa possibilidade , optou-se pela escolha de temperaturas em que $|T_2 - T_1| < 1,0$ K. Com essa condição, praticamente, $T \approx (T_1 + T_2)/2$.

Tabela 2 - A tabela foi construída com os valores fornecidos por Houghton. Os valores da razão k/m, entre a constante de Boltzmann e a massa média das moléculas, foram calculados com a Eq. (10).

T_1 (K)	Z_{gp1}(km)	z_1(km)	p_1(mb)	T_2 (K)	Z_{gp2}(km)	z_2(km)	p_2(mb)	k/m [J/(kg.K)]
$\lambda = 10^0$								
219,1	12,42	12,47	200,0	218,8	23,91	24,05	30,00	272,3
204,8	15,00	15,06	129,8	204,0	20,00	20,10	55,61	284,1
206,2	15,00	15,06	130,4	207,2	20,00	20,10	56,55	285,8
201,9	16,00	16,07	110,5	201,9	18,00	18,08	79.10	291,0
205,9	15,00	15,06	130,0	206,2	19,00	19,09	66,78	286,8
$\lambda = 40^0$								
216,4	11,70	11,72	200,0	216,1	20,47	20,53	50,00	287,3
216,3	12,00	12,02	190,8	216,5	21,00	21,07	45,98	287,7
218,2	13,00	13,02	175,2	218,1	21,00	21,07	49,34	284,2
218.5	11,00	11,02	233,9	218,2	25,00	25,09	24,36	278,5
214,6	14,00	14,03	139,3	214,5	20,00	20,06	53,63	288,3
$\lambda = 70^0$								
224,6	8,923	8,912	300,0	224,5	16,11	16,11	100,0	285,4
214,9	11,10	11,09	200,0	215,0	32,61	32,69	7,000	292,2
218,5	10,00	9,989	238,7	218,5	12,00	11,99	174,6	286,6
223,8	10,00	9,989	254,2	223,7	14,00	13,99	137,9	286,0
227,9	9,000	8,988	302,1	227,9	14,00	13,99	142,6	286,2

Com relação às pressões p_1 e p_2, medidas em milibares, não houve a necessidade de transformá-las para outro sistema de unidades, já que, na Eq. (10), aparecem como o logaritmo de uma razão (ver as colunas 4 e 8 da Tabela 2).

Finalmente com todas essas grandezas físicas definidas, obteve-se, através da Eq. (10), a razão entre a constante de Boltzmann e a massa média das moléculas que compõem a baixa atmosfera terrestre, resultando para a constante de Boltzmann o valor: $k =$ 1,373 x 10^{-23} J/K. O erro relativo, entre o valor calculado e o encontrado na literatura científica, $k =$ 1,381 x 10^{-23} J/K, é menor que 0,60%.

Referências

[1] J.M.F. Bassalo, Revista Brasileira de Ensino de Física **21**, 2 (1999).

[2] S.R.A. Salinas, Revista Brasileira de Ensino de Física **27**, 2, (2005).

[3] J.Q. Ayoade, *Introdução à Climatologia Para os Trópicos* (Editora Beltrand Brasil, Rio de Janeiro, 1996), 4^a ed.

[4] D. Halliday, R. Resnick e K. S Krane, *Física 2* (Livros Técnicos e Científicos Editora, Rio de Janeiro, 2003), v. 2, 5ª ed.

[5] J.T. Houghton, *Physics of Atmosphere* (Cambridge University Press, London, 1977).

[6] W. Lopes, Caderno Brasileiro de Ensino de Física **25**, 3 (2008).