

Campo Magnético no Eixo de Espiras Poligonais de Perímetro Fixo: Da Geometria Local ao Regime Dipolar

Magnetic Field on the Axis of Fixed-Perimeter Polygonal Loops: From Local Geometry to the Dipolar Regime

Carlos Eduardo dos Santos Leal¹, Bárbara Maria Oliveira Santos^{*1}

¹Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Faculdade de Engenharia, Departamento de Engenharia Elétrica, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

Recebido em 02 de setembro de 2025. Revisado em 27 de janeiro de 2026. Aceito em 01 de fevereiro de 2026.

Neste trabalho é desenvolvida uma formulação analítica para o campo magnético ao longo do eixo de espiras poligonais regulares com N lados e perímetro fixo L , usando a Lei de Biot-Savart. Obtém-se uma expressão geral válida para qualquer N , incluindo os casos clássicos da espira quadrada e circular. A análise permite identificar quatro regimes distintos do campo axial: local, local-estendido, intermediário e dipolar. No regime local, espiras com poucos lados apresentam maior intensidade no eixo devido ao menor apótema; no regime intermediário, espiras com N maior superam as demais pela distribuição mais homogênea de corrente; e, no regime dipolar, todas as geometrias convergem para o comportamento $\propto 1/z^3$. A abordagem normalizada adotada ($B_z/(\mu_0 I/L)$ e z/L) permite comparar diretamente todas as geometrias com o mesmo perímetro e evidencia, de forma didática, a transição contínua entre os regimes físico-geométricos. Os resultados fornecem um tratamento unificado que complementa e estende as soluções clássicas de polígonos regulares no ensino de Eletromagnetismo.

Palavras-chave: campo magnético, espiras poligonais, Biot-Savart, regime dipolar, ensino de eletromagnetismo.

In this work, an analytical formulation is developed for the magnetic field along the axis of regular polygonal loops with N sides and fixed perimeter L , using the Biot-Savart law. A general expression valid for any N is obtained, including the classical square and circular loop cases. The analysis reveals four distinct regimes of the axial magnetic field: local, extended-local, intermediate, and dipolar. In the local regime, loops with fewer sides exhibit a stronger on-axis field due to their smaller apothem; in the intermediate regime, loops with larger N dominate owing to the more homogeneous current distribution; and in the dipolar regime, all geometries converge to the $\propto 1/z^3$ behavior. The normalized variables adopted ($B_z/(\mu_0 I/L)$ and z/L) enable direct comparison among all geometries with the same perimeter and clearly illustrate the continuous transition between the physical-geometrical regimes. The results provide a unified treatment that complements and extends the classical solutions for regular polygons, offering substantial didactic value for the teaching of Electromagnetism.

Keywords: magnetic field, polygonal loops, Biot-Savart law, dipole regime, electromagnetism education.

1. Introdução

O estudo de bobinas e espiras condutoras desempenha papel fundamental tanto em aplicações tecnológicas quanto na formação conceitual em disciplinas de Eletromagnetismo. A geometria das bobinas influencia diretamente a distribuição do campo magnético, sendo um aspecto central no projeto de dispositivos que dependem de campos bem controlados, como sistemas de ressonância magnética [1], equipamentos de fusão nuclear [2] e arranjos de blindagem magnética [3]. Em muitos desses casos, a homogeneidade ou a intensidade do campo em regiões específicas é sensível à forma do enrolamento, aspecto discutido em trabalhos clássicos e contemporâneos de projeto de bobinas [4].

No contexto acadêmico, compreender como a geometria afeta o campo gerado por um circuito simples é igualmente importante, pois permite ao estudante visualizar relações entre simetria, projeções geométricas e diferentes regimes de validade de aproximações analíticas [5].

Apesar de existirem formulações clássicas para espiras poligonais regulares, como as de Shangguan *et al.* [6], e estudos que tratam de casos particulares, por exemplo Lei *et al.* [7], que trata de uma abordagem 3D para cálculo de espiras de formato arbitrário com seção transversal retangular, e Pissanetzky *et al.* [8], que trata de expressões analíticas para condutores também com abordagem tridimensional, esses trabalhos não apresentam uma descrição sistemática do comportamento do campo ao longo de todo o eixo para diferentes números de lados N .

Dentre as diferentes abordagens utilizadas para modelar campos magnéticos gerados por bobinas, destacam-se

*Endereço de correspondência: barbara.santos@eng.uerj.br

Editor-Chefe: Marcello Ferreira

tanto os métodos numéricos quanto as técnicas analíticas. No primeiro grupo, simulações eletromagnéticas baseadas no método de elementos finitos (FEM) permitem analisar geometrias arbitrárias e distribuições complexas de corrente, como em Bastos & Sadowski [9]. No segundo grupo, técnicas analíticas fornecem expressões fechadas que evidenciam a estrutura física do problema, sendo particularmente adequadas para o ensino introdutório de Eletromagnetismo. Entretanto, mesmo nesses estudos, a análise ao longo de todo o eixo e a comparação direta entre diferentes valores de N permanecem tratadas de forma fragmentada.

O presente artigo avança nesse ponto ao analisar, por meio da Lei de Biot–Savart, a densidade de campo magnético na direção axial gerado por correntes percorrendo espiras regulares com N lados e perímetro fixo L , explorando a evolução do campo desde a região local até o regime dipolar assintótico. A normalização adimensional adotada, $B_z/(\mu_0 I/L)$ e z/L , permite comparar de forma direta e universal todas as geometrias com o mesmo perímetro, destacando tanto as diferenças quanto os pontos de convergência. Essa abordagem evidencia quatro regimes fisicamente distintos: local, local-estendido, intermediário e dipolar, e mostra como o efeito da geometria diminui gradualmente à medida que a distância ao plano da espira aumenta.

Embora o estudo não trate especificamente de aplicações tecnológicas ou otimização de bobinas, os resultados apresentam valor didático significativo. A análise clarifica, de forma visual e analítica, como a geometria influencia o campo no eixo, como surgem os cruzamentos entre as diferentes curvas normalizadas, e como se estabelece naturalmente o comportamento $\propto 1/z^3$ no regime distante. Assim, o trabalho complementa as formulações tradicionais e oferece um tratamento integrado apropriado para disciplinas introdutórias de Magnetostática. O desenvolvimento aqui apresentado pode ser incluído em disciplinas de Eletricidade e/ou de Eletromagnetismo de cursos de Engenharia e Física. Além da discussão teórica, o trabalho inclui o desenvolvimento de um código em Python para visualização das linhas de campo magnético das espiras, auxiliando no processo didático de aplicação dos conceitos aqui trabalhados.

O artigo está organizado da seguinte forma: a Seção 2 apresenta os fundamentos teóricos e a formulação analítica; a Seção 3 discute os resultados e a identificação dos regimes; a Seção 4 descreve brevemente o código em Python desenvolvido para auxiliar na aplicação didática dos princípios delineados neste trabalho; e a Seção 5 apresenta as conclusões gerais.

As variáveis descritas no artigo estão resumidas na Quadro 1.

2. Fundamentos Teóricos

Desde o experimento de Oersted, em 1820, sabe-se que correntes elétricas geram campos magnéticos no

Quadro 1: Lista de variáveis usadas e descritas neste trabalho.

Símbolo	Variável
$\vec{H}$	Intensidade de campo magnético
$\vec{B}$	Densidade de fluxo magnético
μ	Permeabilidade magnética
μ_0	Permeabilidade magnética do vácuo
I	Corrente elétrica
$\vec{d\ell}$	Vetor elemento de comprimento de fio
$\vec{r}$	Vetor distância
r	Valor absoluto do vetor distância
$\hat{r}$	Vetor unitário na direção do vetor distância
θ	Ângulo entre a altura de um ponto de observação P e o fio e o diferencial de comprimento de fio
R	Altura de um ponto de observação P e o fio
B_z	Densidade de fluxo magnético na direção vertical (z)
L	Perímetro da espira
N	Número de lados da espira
a	Razão entre o perímetro e o número de lados da espira
$B_{z,N}$	Densidade de fluxo na direção z para a espira com N lados

espaço ao seu redor. Este campo é representado tradicionalmente pelo vetor campo magnético $\vec{H}$, associado à ação magnetizante da corrente. Para descrever de maneira completa as interações magnéticas, introduz-se a grandeza vetorial $\vec{B}$, denominada densidade de fluxo magnético ou vetor indução magnética, relacionada ao campo $\vec{H}$ pela permeabilidade magnética μ do meio, em unidades no SI:

$$\vec{B} = \mu \vec{H}. \quad (1)$$

A Lei de *Biot–Savart* estabelece que o vetor indução magnética, num ponto P (posicionado em $\vec{r}$), devido a uma corrente I uniformemente distribuída em um fio é dada por:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{f_1}^{f_2} \frac{I \vec{d\ell} \times \hat{r}}{r^2}, \quad (2)$$

sendo $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m a permeabilidade magnética do vácuo e f_1 e f_2 os pontos de início e fim do fio.

Na Figura 1, $\vec{d\ell}$ é o vetor elemento de comprimento do fio, $r = |\vec{r}|$, $\hat{r}$ é o vetor unitário que aponta de $\vec{d\ell}$ até o ponto P. A distância R denota o apótema (distância perpendicular do ponto P ao segmento do fio). Os ângulos θ_1 e θ_2 representam os ângulos máximos formados entre a reta que liga a extremidade de cada parte do fio ao ponto P e o apótema R .

A forma integral adotada para o campo magnético de segmentos lineares é consistente com o desenvolvimento apresentado em Balanis [10]. Juntam-se diversos segmentos lineares para formação da espira regular, todos no mesmo plano. Devido à simetria do problema da

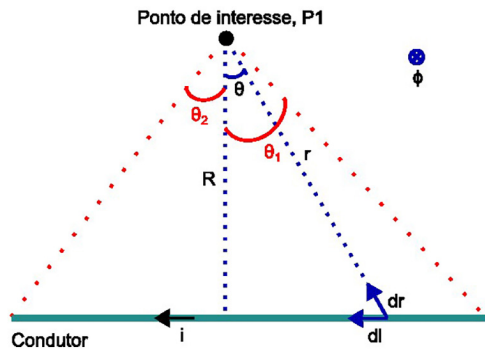


Figura 1: Segmento de fio finito percorrido por corrente I , destacando as definições de apótema (R) e ângulos usados na aplicação da Lei de Biot-Savart, sendo θ os ângulos no plano de exame e Φ o ângulo normal ao plano de exame. O eixo z é perpendicular ao plano da figura. P1 denota o ponto de interesse.

espira regular, as componentes transversais de $\vec{B}(\vec{r})$ se cancelam, restando apenas a componente axial $B_z(\vec{r})$, no ponto P . Efetuando algumas mudanças de variáveis, a Equação (2) fica reduzida à:

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \int_{-\theta_1}^{\theta_2} \cos \theta d\theta, \quad (3)$$

e então,

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} (\sin \theta_2 + \sin \theta_1). \quad (4)$$

Este resultado é fundamental para o estudo de espiras poligonais, pois cada segmento pode ser analisado isoladamente via Equação (4). Considerando a simetria da espira regular, o campo axial resultante no centro de cada espira ($z = 0$) é o somatório das contribuições dos N lados, cada um posicionado a uma mesma distância R do eixo e formando ângulos definidos e limitados pelos ângulos θ_1 e θ_2 [11].

O desenvolvimento do cálculo do campo magnético B_z no eixo da espira ($z = 0$) para uma espira poligonal regular de N lados, lado de comprimento a , e perímetro fixo L , considera o ponto P situado no centro da espira, sendo a distância radial R medida ao longo da mediatriz de cada lado [12]. O comprimento de cada lado é dado por

$$a = \frac{L}{N}, \quad (5)$$

e o apótema R , isto é, a distância do centro da espira ao ponto médio de um lado, é expressa por

$$R = \frac{a}{2} \cdot \tan \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{N} \right) = \frac{a}{2} \cot \frac{\pi}{N}. \quad (6)$$

A Figura 2 ilustra, como exemplo, uma espira quadrada, onde $a = L/4$ é o comprimento de cada lado da espira. O ponto P situa-se no centro da espira, no plano XY com $z = 0$. Cada lado é percorrido por uma corrente

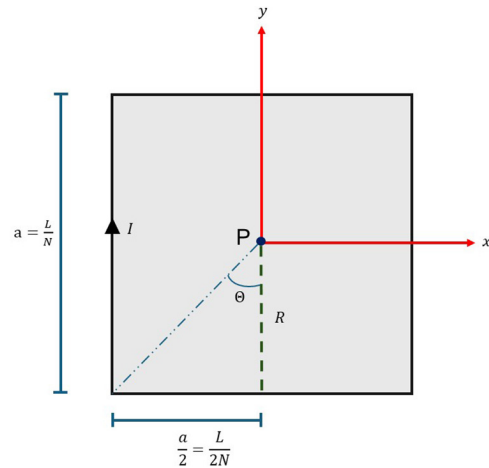


Figura 2: Espira regular com $N = 4$ lados e $a = \frac{L}{4}$. O ponto P está no centro ($z = 0$). O apótema é dado por $R = \frac{a}{2} \cot \left(\frac{\pi}{4} \right)$ e o ângulo $\theta = \frac{\pi}{4}$.

estacionária I , e o campo total no ponto P é obtido pela superposição vetorial das contribuições de N segmentos retilíneos, segundo a Lei de Biot-Savart.

Essa configuração serve de referência para comparar o comportamento de polígonos com diferentes números de lados e compreender a transição gradual para o limite circular ($N \rightarrow \infty$). Nela, $R \approx \frac{L}{2\pi}$ e $\sin \theta \approx \frac{\pi}{N}$.

Considerando o ponto P situado sobre a mediatriz de cada lado da espira poligonal regular, tem-se $\theta_1 = \theta_2$. Nessas condições, a simetria do problema permite escrever:

$$\sin \theta_1 = \sin \theta_2 = \frac{\left(\frac{L}{2} \right)}{\sqrt{R^2 + \frac{L^2}{4}}} \quad (7)$$

Dessa forma, obtém-se a expressão para a indução magnética no centro da espira ($z = 0$), em termos do apótema R , para uma estrutura poligonal regular de N lados, onde $B_{z,N}(z)$, componente axial da indução magnética para o polígono de N lados, atinge o valor máximo no centro da espira,

$$B_{z,N}(z = 0) = \frac{N \mu_0 I}{2 \pi R} \sin \theta. \quad (8)$$

Substituindo as expressões de R e θ na Equação (8), obtém-se uma forma geral recorrente para a componente da indução magnética na direção axial no centro de uma espira poligonal regular de N lados e perímetro fixo L [13]:

$$B_{z,N}(0) = \frac{\mu_0 I}{L} \cdot \frac{N^2}{\pi} \cdot \tan \left(\frac{\pi}{N} \right) \cdot \sin \left(\frac{\pi}{N} \right). \quad (9)$$

Nota-se que, no limite $N \rightarrow \infty$, a espira tende a uma configuração circular. Aplicando a expansão em série de Taylor para $\pi/N \ll 1$, isto é, $\sin(\pi/N) \approx \pi/N$ e $\cos(\pi/N) \approx 1$, recupera-se a expressão correspondente

Tabela 1: Campo magnético $B_{z,N}(0)$, em unidades de $\left(\frac{\mu_0 I}{L}\right)$, no centro de espiras poligonais regulares de N lados e com perímetro fixo L .

Espiras com N Lados	$B_{z,N}(0)/\left(\frac{\mu_0 I}{L}\right)$
3	4,297
4	3,601
5	3,398
6	3,308
20	3,156
100	3,142
∞	3,142

ao caso de uma espira circular de raio $a = L/(2\pi)$ [11]:

$$B_{z\infty}(0) = \frac{\mu_0 I \pi}{L} \approx 3,142 \frac{\mu_0 I}{L}. \quad (10)$$

A Tabela 1 apresenta os valores numéricos de $B_{z,N}(0)$, normalizado em unidades de $\left(\frac{\mu_0 I}{L}\right)$, para diferentes N , utilizando a Equação (9).

Conforme esperado, para espiras com poucos lados, o campo no centro é mais intenso, devido à maior concentração de linhas de campo magnético em regiões próximas ao eixo. À medida que N aumenta, o campo tende a reduzir, aproximando-se do valor limite correspondente à espira circular. Esta análise destaca o papel da geometria na modulação do campo magnético e estabelece a base para o estudo do comportamento ao longo do eixo da espira ($z > 0$), onde são identificados regimes distintos: próximo ao centro, dominado pela geometria local; e distante, caracterizado pelo comportamento dipolar, tema aprofundado na seção de Resultados.

Para além da determinação do campo magnético no centro da espira ($z = 0$), é de particular interesse caracterizar a distribuição do campo ao longo de todo o eixo de simetria, especialmente no contexto de aplicações práticas onde o regime dipolar emerge a uma determinada distância.

A análise do campo $B_{z,N}(z)$ em pontos arbitrários ao longo do eixo fornece uma compreensão completa do efeito da geometria sobre a intensidade e a configuração espacial do campo magnético. Cada lado retilíneo de uma espira poligonal regular gera uma contribuição de campo magnético cujo componente axial é obtido projetando-se a expressão da Lei de Biot-Savart para um segmento finito [12].

A Figura 3 ilustra, como exemplo, um ponto P situado sobre o eixo de simetria de uma espira quadrada ($N = 4$) a uma altura z , onde o campo axial total $B_{z,4}(z)$ é, portanto, a soma de 4 parcelas idênticas em magnitude, variando apenas pelo ângulo azimutal de cada lado em torno do eixo.

O campo devido a um segmento retilíneo finito a uma distância $r = \sqrt{R^2 + z^2}$, supondo os ângulos θ_1 e θ_2 iguais, tem-se

$$B_\phi = \frac{\mu_0 I}{2 \pi r} (\sin \theta). \quad (11)$$

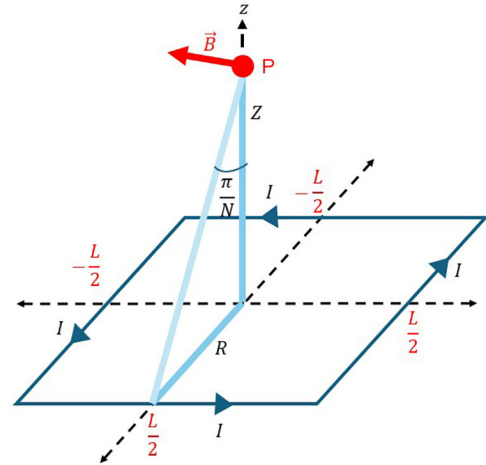


Figura 3: Espira quadrada de lado $L/4$ posicionada no plano xy , percorrida por corrente I . Os quatro lados contribuem para o cálculo total de $B_{z,4}(z)$ via a aplicação da Lei de Biot-Savart. O ponto P está situado sobre o eixo z , perpendicular ao plano da espira.

Pode-se transformar o $\sin \theta$,

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \left(\frac{\left(\frac{L}{2N}\right)}{\left(r^2 + \left(\frac{L}{2N}\right)^2\right)^{0.5}} \right) \\ &= \left(\frac{\left(\frac{L}{2N}\right)}{\left(R^2 + z^2 + \left(\frac{L}{2N}\right)^2\right)^{0.5}} \right). \end{aligned} \quad (12)$$

A obtenção de B_z para um lado vem da projeção de B_ϕ usando o ângulo $\frac{\pi}{N}$,

$$B_z(1 \text{ lado}) = B_\phi \sin \frac{\pi}{N} = B_\phi \frac{R}{r}, \quad (13)$$

$$B_z(1 \text{ lado}) = \frac{\mu_0 I}{2 \pi r} \left(\frac{\left(\frac{L}{2N}\right)}{\left(R^2 + z^2 + \left(\frac{L}{2N}\right)^2\right)^{0.5}} \right) \frac{R}{r}, \quad (14)$$

$$B_z(1 \text{ lado}) = \frac{\mu_0 I}{2 \pi} \left(\frac{\left(\frac{L}{2N}\right)}{\left(R^2 + z^2 + \left(\frac{L}{2N}\right)^2\right)^{0.5}} \right) \frac{R}{R^2 + z^2}. \quad (15)$$

Como são N lados, multiplica-se a expressão por N :

$$B_z = \frac{\mu_0 I N}{2 \pi} \left(\frac{\left(\frac{L}{2N}\right)}{\left(R^2 + z^2 + \left(\frac{L}{2N}\right)^2\right)^{0.5}} \right) \frac{R}{R^2 + z^2}. \quad (16)$$

O fator $\frac{R}{R^2+z^2}$ pode ser reescrito em termos de L , N e z ,

$$\begin{aligned} R^2 + z^2 &= \left(\frac{L}{2N}\right)^2 \cot^2 g^2\left(\frac{\pi}{N}\right) + z^2 \\ &= \frac{\left(z^2 \sin^2 \frac{\pi}{N} + \left(\frac{L}{2N}\right)^2 \cos^2 \frac{\pi}{N}\right)}{\sin^2 \frac{\pi}{N}}, \end{aligned} \quad (17)$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} \frac{R}{R^2 + z^2} &= \left(\frac{L}{2N} \cos \frac{\pi}{N} \sin \frac{\pi}{N}\right) \\ &\cdot \left(z^2 \sin^2 \frac{\pi}{N} + \left(\frac{L}{2N}\right)^2 \cos^2 \frac{\pi}{N}\right)^{-1}. \end{aligned} \quad (18)$$

Então, o campo magnético na direção z pode ser obtido,

$$\begin{aligned} B_{z,N} &= N B_{(z,N)(1 \text{ lado})} = \frac{\mu_0 I N}{2\pi} \frac{R}{R^2 + z^2} \\ &\cdot \left(\frac{L}{2N}\right) \left(\sqrt{R^2 + z^2} + \left(\frac{L}{2N}\right)^2\right)^{-1} \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} B_{z,N} &= \frac{\mu_0 I N}{2\pi} \left(\frac{L}{2N} \cos \frac{\pi}{N} \sin \frac{\pi}{N}\right), \\ &\left(z^2 \sin^2 \frac{\pi}{N} + \left(\frac{L}{2N}\right)^2 \cos^2 \frac{\pi}{N}\right)^{-1} \\ &\cdot \left(\left(\frac{L}{2N}\right) \sin \frac{\pi}{N}\right) \left(\sqrt{z^2 \sin^2 \frac{\pi}{N} + \left(\frac{L}{2N}\right)^2}\right)^{-1}. \end{aligned} \quad (20)$$

Obtém-se, então, a seguinte forma geral [12],

$$B_{z,N}(z) = \left(\frac{\mu_0 I N}{2\pi}\right) \cdot K_1(z) \cdot K_2(z), \quad (21)$$

em que

$$\begin{aligned} K_1(z) &= \frac{\left(\frac{L}{2N}\right)^2}{\left[z^2 \sin^2\left(\frac{\pi}{N}\right) + \left(\frac{L}{2N}\right)^2 \cos^2\left(\frac{\pi}{N}\right)\right]} \text{ e} \\ K_2(z) &= \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{N}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{N}\right)}{\sqrt{\left(z^2 \sin^2\left(\frac{\pi}{N}\right) + \left(\frac{L}{2N}\right)^2\right)}}. \end{aligned} \quad (22)$$

Os termos $K_1(z)$ e $K_2(z)$ reúnem todos os fatores associados ao apótema $L/(2N)$, e à distância axial z , além de incorporarem as dependências trigonométricas $\sin \pi/N$ e $\cos \pi/N$.

A Equação (12) é especialmente conveniente para análise numérica e comparações entre diferentes N , além de recuperar a Equação (9), aplicável em $z = 0$, para qualquer espira regular de N lados incluindo o limite $N \rightarrow \infty$, em que, com as aproximações de $\sin\left(\frac{\pi}{N}\right) \approx \frac{\pi}{N}$ e $\cos\left(\frac{\pi}{N}\right) \approx 1$, reproduz-se o caso da espira circular.

3. Resultados e Discussões

A Figura 4 apresenta a comparação dos perfis normalizados de $B_{z,N}\left(\frac{z}{L}\right)$, em unidades de $\left(\frac{\mu_0 I}{L}\right)$, obtidos a partir da Equação (10), para espiras poligonais regulares com diferentes números de lados ($N = 3, 4, 6, 20$ e 100), incluindo o caso limite da espira circular, com I e L constantes. Aqui, $\frac{z}{L}$ e $\frac{B_{z,N}\left(\frac{z}{L}\right)}{\left(\frac{\mu_0 I}{L}\right)}$ são grandezas normalizadas e adimensionais.

Observa-se claramente na Figura 4, que, quando z/L é muito pequeno, $B_{z,3}(z/L)$ domina, mas a partir de $z/L \approx 0,08$ há cruzamentos, e em torno de $z/L = 0,5$, todas as curvas começam a convergir para o mesmo comportamento dipolar. A seguir, detalharemos cada um desses quatro regimes físicos identificados: local ($z/L \lesssim 0,1$), intermediário ($0,1 \lesssim z/L \lesssim 0,50$), de transição ($0,5 \lesssim z/L \lesssim 1,0$) e dipolar ($z/L \gtrsim 1,0$).

3.1. Regime local ($0 < z/L < 0,1$)

Quando z/L é muito pequeno (tipicamente $0 < z/L \lesssim 0,1$), estamos no que chamamos de regime local. Nesse intervalo, o efeito da geometria local (proximidade do fio ao eixo) é dominante, e o campo magnético axial é sensível à proximidade de cada segmento de corrente em relação ao ponto de observação. Geometricamente, como o perímetro é fixo, cada espira de N lados tem um apótema que varia com N : quanto menor o número de lados, maior o comprimento de cada segmento e, portanto, menor o apótema.

Em $z/L = 0$, o valor do campo é dado pela expressão especial derivada de Biot-Savart para cada polígono, Equação (8). O caso mais extremo é a espira triangular ($N = 3$), cujo apótema é o menor de todos, concentrando mais as linhas de campo magnético próximas ao eixo. Consequentemente, $B_{z,3}(0)$ atinge o valor máximo, mas

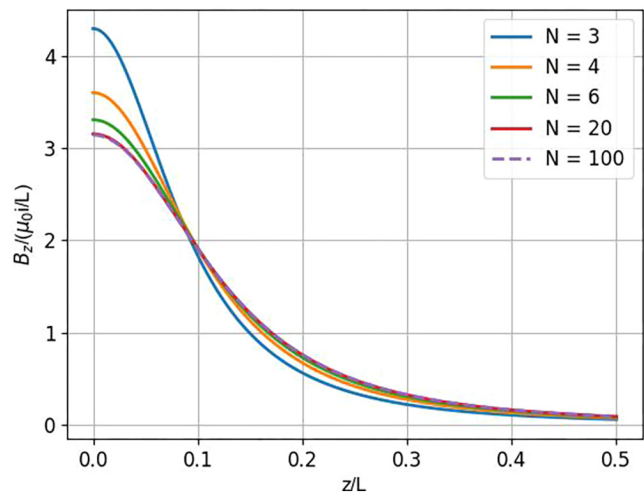


Figura 4: Comportamento da indução magnética no eixo de espiras regulares a uma altura z/L .

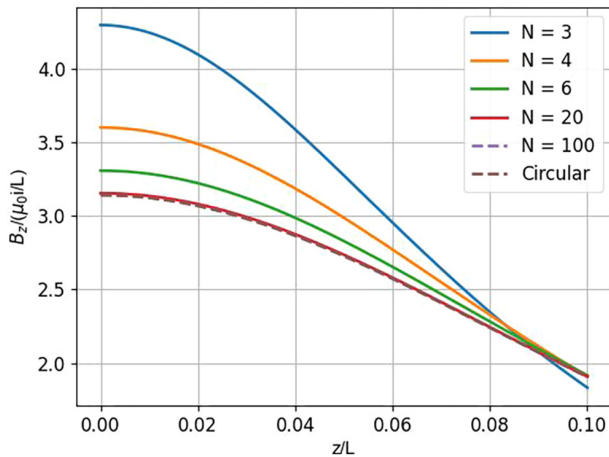


Figura 5: Comportamento de $B_{z,N}/\left(\frac{\mu_0 I}{L}\right)$ na região próxima ($0 < z/L < 0,1$).

à medida em que se aumenta N , os elementos de corrente se afastam do centro e o afastamento máximo se dá com N tendendo ao infinito em torno da circunferência de mesmo perímetro, reduzindo a intensidade de $B_{z,N}(z=0)$ à medida que N cresce até o limite circular ($N \rightarrow \infty$), vide Quadro 1. Ainda que todos os polígonos tenham a mesma quantidade de fio, essa distribuição geométrica define o máximo de $B_{z,N}$ no centro da espira: é o “efeito apótema” em máxima evidência.

A Figura 5 descreve o comportamento de $B_{z,N}(z/L)$ normalizado para diversas espiras regulares de N lados no regime local desde $z=0$ até $z=0,1L$.

Os cruzamentos entre as curvas referentes às espiras analisadas ($N=3, 4, 6, 20, 100$ e espira circular) ocorrem na faixa de $0,08 \leq z/L \leq 0,1$, chamada de região local-estendida. É possível notar que os pontos de cruzamento curva a curva se localizam na ordem crescente de N , ou seja, o cruzamento entre as curvas das espiras $N=3$ e $N=4$ é o primeiro a ocorrer, seguido dos cruzamentos da $N=3$ e $N=6$, assim por diante, como mostra a Figura 6, em que essa região é expandida para análise.

Na Figura 6, observa-se que o declínio das curvas é aproximadamente linear nesta pequena faixa, mas as diferenças entre os polígonos ainda são visíveis: quanto maior N , mais suave o decaimento local, e mais alto o valor do campo. Este gráfico quantifica a análise do regime local-estendido, verificando de forma minuciosa como a influência da geometria perde predominância e o campo converge para o comportamento da espira circular à medida que se afasta do plano da espira. Esse comportamento evidencia que, na região local, espiras com poucos lados concentram mais campo no eixo, porém esse efeito já começa a perder predominância a partir de $z/L=0,1$. Portanto, observa-se que na região local e local-estendida as curvas caem rapidamente, mas ainda sob o efeito da “concentração” de corrente próxima ao eixo (geometria local). Polígonos de N menor decaem mais acentuadamente, de modo que, antes mesmo de $z/L \approx 0,1$, já foi possível verificar a ocorrência de

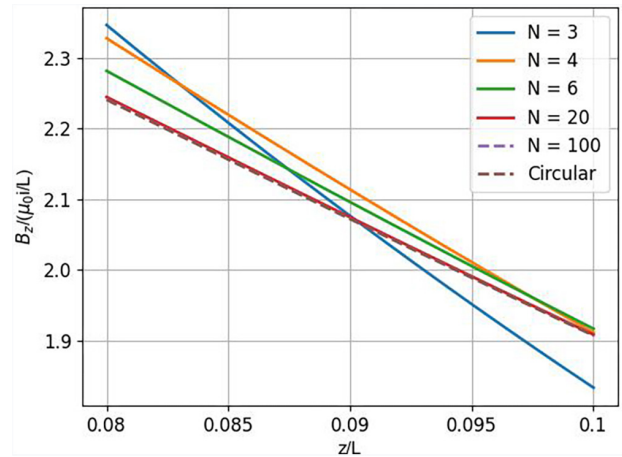


Figura 6: Comportamento de $B_{z,N}/\left(\frac{\mu_0 I}{L}\right)$ na região próxima ($0,08 < z/L < 0,1$).

diversos cruzamentos entre as curvas de N maior e a de N pequeno, onde esse padrão progressivo de intersecções ocorreu em valores de z/L distintos dependendo das geometrias envolvidas.

3.2. Regime intermediário ou de “quase” independência geométrica ($0,1 < z/L < 0,5$)

Ao se elevar gradualmente z/L para valores entre 0,1 e 0,5, inicia-se o que se chama de região intermediária. Aqui, a influência estrita da geometria local já começou perder predominância: cada segmento de corrente, embora contribua de modo diferente para espiras de N pequeno ou grande, já não domina isoladamente a magnitude de $B_{z,N}(z/L)$.

Na Figura 7, observa-se que, para todo o intervalo $0,1 \leq z/L \leq 0,5$, as curvas de $B_{z,N}(z/L)$ se ordenam monotonamente: $B_{z,3}(z/L) < B_{z,4}(z/L) < B_{z,6}(z/L) < B_{z,20}(z/L) < B_{z,100}(z/L) < B_{z,\infty}(z/L)$.

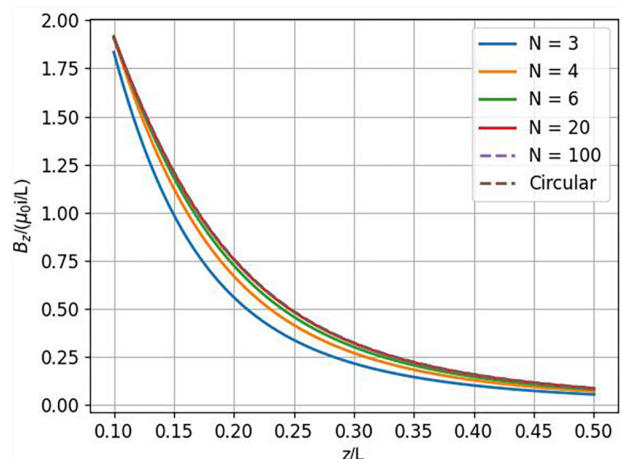


Figura 7: Comportamento de $B_{z,N}/\left(\frac{\mu_0 I}{L}\right)$ na região próxima ($0,1 < z/L < 0,5$).

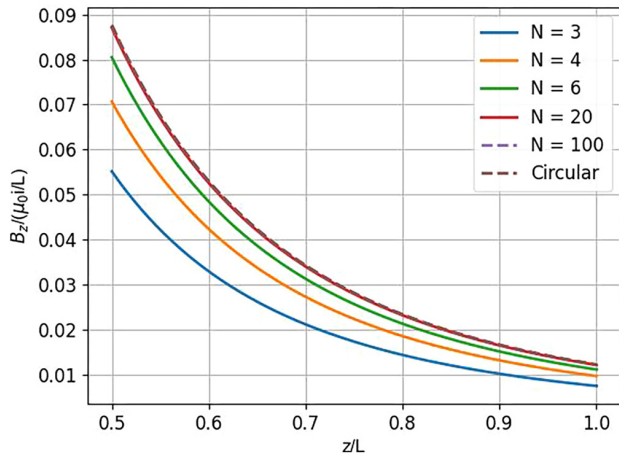


Figura 8: Comportamento de $B_{z,N}/(\frac{\mu_0 I}{L})$ na região próxima ($0,5 < z/L < 1,0$).

Esta é a região em que “polígonos de N maior superam polígonos de N menor” em termos de intensidade de campo, pois a distância axial já reduz a vantagem de ter apótemas pequenos. Fisicamente, o campo produzido por cada segmento retilíneo agora tem componente axial atenuada pela distância z , e polígonos com mais lados, embora cada segmento fique um pouco mais afastado do eixo, mantêm uma distribuição de corrente que, somada, resulta em $B_{z,N}(z/L)$ superior às espiras de poucos lados, com a espira circular (limite $N \rightarrow \infty$) já ocupando o topo das intensidades em $z/L = 0,5$.

3.3. Região de Transição ($0,5 < z/L < 1,0$)

Entre $z/L = 0,5$ e $z/L = 1$, atravessa-se a faixa de transição em que as diferenças entre polígonos ainda existem, porém se tornam cada vez menores. Nessa região z/L , há afastamento suficiente do plano de cada espira para que o detalhe da geometria (vértices, lados retos) perca relevância: a aproximação multipolar ganha consistência, e observa-se que todas as curvas de $B_{z,N}(z)$ se aproximam consideravelmente. Embora ainda a ordem $B_{z,3} < B_{z,4} < B_{z,6} < B_{z,20} < B_{z,100} < B_{z,\infty}$ seja seguida, a diferença percentual entre, por exemplo, $N = 20$ e $N \rightarrow \infty$ em $z/L = 1$ cai para alguns poucos dígitos após a vírgula (cerca de 1,21% vs. 1,22% em unidades de $\mu_0 I/L$). Este é o ponto em que o momento magnético de dipolo de cada espira, que escala como $|\vec{m}| = I \cdot A$, sendo A a área interna, passa a dominar a física local: a espira circular, por possuir a maior área possível para L fixo, já supera as demais com pequena diferença.

A Figura 8 mostra como a sequência de cruzamentos que se observa na região intermediária agora se suaviza, e a espira circular assume a posição de campo mais intenso de modo definitivo.

3.4. Regime assintótico/dipolar ($1 < z/L < 10$)

Para z/L acima de 1 (até cerca de 10), o sistema entra no que se chama de regime dipolar pleno. Nesse domínio,

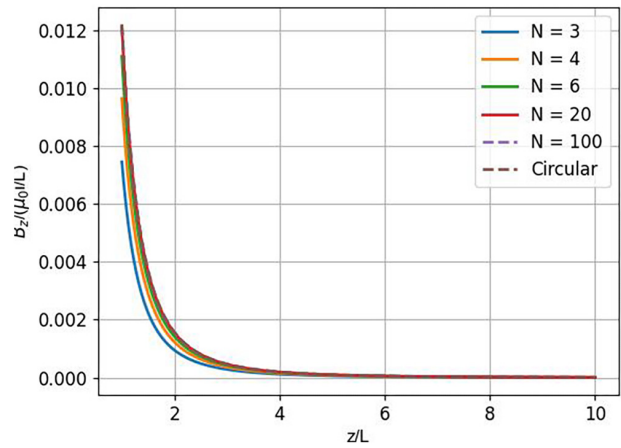


Figura 9: Comportamento de $B_{z,N}(\frac{\mu_0 I}{L})$ na região próxima ($1,0 < z/L < 10,0$).

z já é grande o suficiente para que, em todas as espiras regulares (independentemente de N), a dependência de $B_{z,N}(z)$ deva obedecer aproximadamente ao comportamento assintótico de dipolo magnético pontual:

$$B_{z,N}\left(\frac{z}{L}\right) \approx \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{m}{z^3}. \quad (23)$$

A Figura 9 mostra que, como o momento de dipolo magnético m é máximo para a espira circular, ela conserva o maior campo para todo $z/L \gtrsim 1$. As espiras de N finito se alinham logo abaixo, quanto maior N , mais próximo da circular. Tal convergência ocorre independentemente da geometria local da espira, evidenciando a irrelevância das particularidades geométricas nesta faixa. Em $z/L = 10$, por exemplo, $B_{z,100}(z/L)$ e $B_{z,\infty}(z/L)$ praticamente se sobrepõem, e as demais já estão quase imperceptivelmente abaixo. Esse êxito universal do decaimento proporcional a $1/z^3$ é o resultado clássico do termo dominante da expansão multipolar da equação (8) [13] demonstrando que, a grandes distâncias, qualquer detalhe das arestas ou ângulos do polígono se torna irrelevante e apenas o momento dipolar efetivo importa.

Outro aspecto importante no comportamento do campo magnético $B_{z,N}(z)$ devido a espiras poligonais de lados N envolve a influência da área das espiras. De acordo com propriedades clássicas da geometria, para polígonos regulares de N lados e com perímetro fixo L , a área interna da espira, A_N , aumenta com o número de lados N , sendo máxima no limite em que o polígono se transforma em um círculo:

$$A_N = \frac{L^2}{4N \tan\left(\frac{\pi}{N}\right)}. \quad (24)$$

Esse aumento da área implica diretamente em um maior afastamento radial dos segmentos de corrente em relação ao eixo central z . Como consequência, o campo magnético produzido por cada elemento de corrente sofre uma redução de intensidade com a distância ao ponto de

observação, tornando-se assintoticamente proporcional a $1/z^3$ típico do regime dipolar.

Assim, espiras com poucos lados possuem áreas menores e estão mais próximas do eixo, gerando campos magnéticos mais intensos nas regiões próximas ao centro da espira ($z \approx 0$), embora mais irregulares devido à presença dos vértices. Por outro lado, conforme N aumenta, a espira se torna mais semelhante a um círculo, resultando em um perfil de campo magnético com intensidade máxima reduzida.

Desta forma, temos duas contribuições para o campo magnético gerado pelas espiras para pontos distantes que envolve o efeito local das áreas e o comportamento assintótico para $B_{z,N}(z/L)$ no regime dipolar, Equação (23).

Assim, a espira circular, que possui a maior área dentre todas as geometrias regulares, também apresenta o maior momento de dipolo magnético, implicando que, a grandes distâncias, o campo magnético gerado por ela é mais intenso do que o das espiras poligonais com N menor, vide Figura 8. Contudo, independentemente da área, todas as espiras tendem, a grandes distâncias, ao mesmo comportamento assintótico de um dipolo magnético pontual, pois neste regime os detalhes geométricos, como vértices ou segmentos curvos, tornam-se irrelevantes.

Portanto, observou-se que a área da espira influencia duplamente o comportamento do campo axial: (i) localmente, afetando a intensidade máxima do perfil próximo ao centro, e (ii) a grandes distâncias, determinando a intensidade do momento de dipolo magnético, enquanto o perfil assintótico se mantém universal e a espira pode, então, ser modelada como um dipolo magnético efetivo.

Em suma, a análise de $B_{z,N}(z/L)$ em função de z/L descreve uma progressão física clara: no regime local, gera mais campo no centro a geometria de poucos lados; na região intermediária, polígonos de N maior superam os de poucos lados; na transição, o momento dipolar começa a vencer definitivamente; e, por fim, no regime dipolar, todas as espiras se comportam como dipolos pontuais, com a espira circular mantendo o campo máximo. Esse percurso mostra como a topologia da corrente, embora fundamental no entorno imediato, perde relevância para distâncias axiais crescentes, entregando o protagonismo ao momento de dipolo e ao decaimento $\propto 1/z^3$.

Embora o presente estudo se concentre no regime quase-estático, com base na Lei de Biot-Savart, e não aborde explicitamente fenômenos de ressonância eletromagnética, a análise geométrica aqui desenvolvida mantém relação direta com a determinação da autoindutância de espiras condutoras e, portanto, com a resposta de circuitos indutivos e ressonantes. A autoindutância depende diretamente da distribuição de fluxo magnético e da área da espira. Ambos os fatores mudam conforme se altera o formato da espira, mantendo-se o perímetro constante. Assim, para espiras que componham circuitos LC ou sistemas de acoplamento ressonante magnético ou indutivo, as variações geométricas discutidas neste

trabalho implicam também modificações na frequência de ressonância f_0 [11].

Portanto, a análise geométrica das espiras, seja no regime local ($z \ll L$) ou no regime dipolar ($z \gg L$), fornece subsídios diretos para compreender como a forma física da bobina influencia suas propriedades indutivas e ressonantes, com impacto em aplicações práticas de ensino e engenharia.

4. Código em Python Para Auxílio no Ensino Dos Regimes de Decaimento de Campo Magnético

O uso de *softwares* para representações e estudos de sistemas eletromagnéticos é prática comum em projetos de Engenharia Elétrica. Além disso, é poderoso recurso didático, uma vez que ajuda o estudante a visualizar campos vetoriais e escalares. Essa experiência enriquece os estudos de estudantes de cursos de Engenharia, Física, Matemática e áreas afins que têm, com esse contato com programação e uso de softwares para simulações eletromagnéticas, a oportunidade de treinamento para seu futuro profissional.

Neste trabalho, foi desenvolvido um código, disponível em [14], que tem como objetivo a visualização das linhas de campo magnético de espiras poligonais regulares. O código faz a geração automática das espiras poligonais e promove sua simulação eletromagnética usando resultados analíticos avaliados ponto a ponto. O código é escrito em Python e faz uso das bibliotecas Magpylib [15], que gera as geometrias e executa os cálculos de campo magnético, da Pyvista [16], que gera os gráficos interativos em 3D, e Numpy [17], para cálculos numéricos avançados.

O código recebe do usuário o número de lados do polígono, seu perímetro total e a corrente que deve circular na espira, e gera como saída o gráfico interativo com as linhas de campo magnético. A possibilidade de interação com o gráfico permite que o usuário se aproxime ou se afaste da espira, observando o comportamento das linhas de campo.

As Figuras 10(a) e 10(b) mostram os resultados para espiras triangulares e hexagonais com perímetro de 1 m e corrente 1 A.

5. Conclusões

Este trabalho explorou, de maneira sistemática, a relação entre a geometria das espiras e a distribuição espacial do campo magnético axial $B_{z,N}(z/L)$ de espiras poligonais regulares. As expressões obtidas para o campo no centro ($z = 0$) e ao longo do eixo da espira ($z > 0$) (Equações 8 e 10) sintetizam de forma clara a dependência funcional de $B_{z,N}(z/L)$ com o perímetro constante L , o número de lados N , a corrente I e a posição relativa z/L , proporcionando uma ferramenta analítica eficiente para descrever tais sistemas.

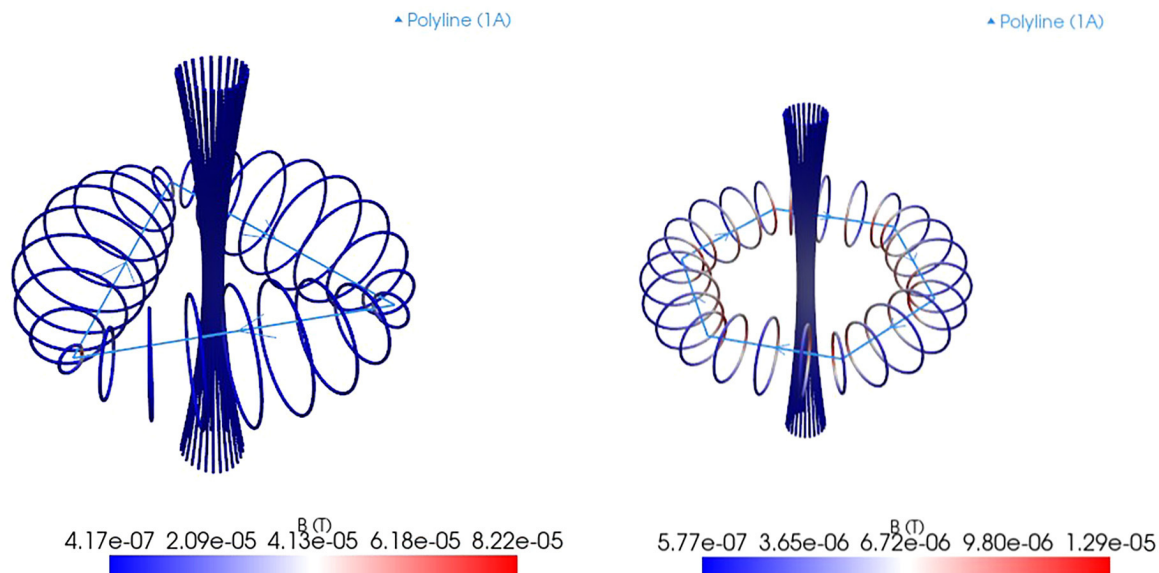


Figura 10: Resultados gerados pelo código em Python para espira: (a) triangular; (b) hexagonal; ambas com perímetro e corrente unitários.

A partir dessas formulações, foi possível realizar uma análise numérica detalhada, que revelou nuances importantes sobre o comportamento do campo magnético em função da geometria da espira. Constatou-se, por exemplo, que espiras com poucos lados ($N = 3, 4, 6$) geram campos mais intensos na região central, dado que seus segmentos retos mais longos concentram as contribuições próximas ao eixo.

Por outro lado, à medida que N aumenta, a espira tende a se aproximar do caso circular, conduzindo a um perfil de campo mais suave e contínuo, mas com intensidade máxima reduzida no eixo (quando comparada com as de N mais baixo), já que os segmentos de corrente estão, em média, mais afastados do centro. Esse aspecto ilustra de forma didática como a geometria influencia não apenas a intensidade, mas também a regularidade do campo produzido.

Do ponto de vista do comportamento assintótico, a análise demonstrou que, independentemente da geometria, todas as espiras convergem para o regime dipolar, caracterizado pela dependência $B_{z,N}(z/L) \propto 1/z^3$. Esse resultado não apenas valida o modelo de aproximação multipolar como reforça a interpretação de que, a grandes distâncias, os detalhes geométricos locais tornam-se irrelevantes, e o momento de dipolo magnético, diretamente proporcional à área da espira, passa a ser o parâmetro determinante da intensidade do campo.

Aspecto particularmente interessante, revelado pelas curvas de $B_{z,N}(z/L)$ em função de z/L , é o modo como diferentes geometrias transitam entre os regimes de campo próximo e distante. O estudo mostrou que: (i) o decaimento do campo magnético muda de acordo com o número de lados de uma espira, sendo mais acentuado conforme o número de lados é reduzido; (ii) que essa

diferença de decaimento produz pontos de cruzamento entre as curvas de decaimento de campo magnético de espiras com diferentes números de lados, sem um ponto universal de convergência.

Em síntese, verificou-se que a escolha da geometria de uma espira não é apenas um exercício matemático: ela determina propriedades magnéticas e elétricas que se manifestam em diversos contextos práticos.

Em ensino de eletromagnetismo, a comparação entre polígonos e o círculo permite ilustrar como a forma influencia o campo axial e o fluxo magnético, visualizando a transição entre os regimes local e dipolar. Em projetos experimentais e tecnológicos, geometrias distintas são relevantes quando se busca otimizar a uniformidade de campo (como nas bobinas de Helmholtz e Maxwell), o fator de acoplamento magnético em sistemas ressonantes ou de transferência indutiva de energia, ou ainda a sensibilidade de sensores magnéticos integrados.

Assim, a análise apresentada neste trabalho tem valor didático, ao demonstrar passo a passo o desenvolvimento analítico e oferecer um código em Python para auxílio didático em sala de aula, e valor para aplicações práticas, servindo de base para compreender como a geometria da bobina impacta grandezas como fluxo, autoindutância e frequência de ressonância.

Por fim, este trabalho não apenas abordou os aspectos físicos fundamentais que regem o comportamento do campo magnético de espiras poligonais, mas também forneceu um exemplo claro de como ferramentas analíticas e computacionais podem ser integradas para aprofundar a compreensão de problemas clássicos de eletromagnetismo, com potencial aplicação em contextos didáticos e de engenharia. A metodologia proposta pode, assim, servir de base para estudos futuros envolvendo outras topologias ou configurações de corrente.

5.1. Uso de IA

O autor Carlos Eduardo dos Santos Leal usou recursos de Inteligência Artificial (IA), da ferramenta ChatGPT, para auxílio na elaboração da revisão do texto-base. A co-autora Bárbara Maria Oliveira Santos não fez uso de Inteligência Artificial.

Agradecimentos

Este trabalho foi financiado em parte pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES/Brasil) – Finance Code 001.

Disponibilidade de Dados

O código em Python para auxílio no ensino dos regimes de decaimento está disponível em um repositório:

Nome: Github

URL: <https://github.com/profbarbarasantos/espiras>

Data de depósito: 16/12/2025

Os dados de análise das expressões analíticas estão todos disponíveis no artigo.

Referências

- [1] M. Masoumi, K. Rajasekhara, D. Parati e B. Bilgin, *IEEE Access* **10**, 130212 (2022).
- [2] M. Rawlik, A. Eggenberger, J. Krempel, C. Crawford, K. Kirch, F.M. Piegsa e G. Quémener, *Am. J. Phys.* **86**, 602 (2018).
- [3] Y. Zhai, D. van der Laan, P. Connolly e C. Kessel, *Fusion Engineering and Design* **168**, 112611 (2021).
- [4] D. Pan, S. Lin, L. Li, J. Li, Y. Jin, Z. Sun e T. Liu, *IEEE Transactions on Industrial Electronics* **67**, 1348 (2020).
- [5] M.I. Grivich e D.P. Jackson, *Am. J. Phys.* **68**, 469 (2000).
- [6] X. Shangguan, P. Tan, T. Tan, B. Song e H. Liu, *J. Power Electron.* **22**, 522 (2022).
- [7] H. Lei, L.Z. Wang e Z.N. Wu, *IEEE Transactions on Magnetics* **38**, 3589 (2002).
- [8] S. Pissanetzki e Y. Xiang, *COMPEL* **9**, 117 (1990).
- [9] J.P.A. Bastos e N. Sadowski, *Electromagnetic Modeling by Finite Element Methods* (CRC Press, Boca Raton, 2003).
- [10] C.A. Balanis, *Balanis' Advanced Engineering Electromagnetics* (Wiley, Hoboken, 2023).
- [11] B.M. Notaros, *Eletromagnetismo* (Pearson, São Paulo, 2011).
- [12] C.E.S. Leal, C. Aguiar e B.M.O. Santos, em: *Anais do 16º Congresso Brasileiro de Eletromagnetismo* (Goiânia, 2024).
- [13] J.D. Jackson, *Classical Electrodynamics* (Wiley, Hoboken, 2009), 3 ed.
- [14] B.M.O. Santos e C.E.S. Leal, *Simulação de campo magnético de espiras regulares*, disponível em: <https://github.com/profbarbarasantos/espiras>, acessado em: 16/12/2025.
- [15] M. Ortner e L.G. Coliado Bandeira, *SoftwareX* **11**, 100466 (2020).
- [16] C.B. Sullivan e A.A. Kaszynski, *Journal of Open Source Software* **4**, 1450 (2019).
- [17] C.R. Harris, K.J. Millman, S.J. Van Der Walt, R. Gommers, P. Virtanen, D. Cournapeau, E. Wieser, J. Taylor, S. Berg, N.J. Smith et al., *Nature* **585**, 357 (2020).