

Análise unidimensional de transdutores piezelétricos baseada no teorema de Thévenin

(One-dimensional analysis of piezoelectric transducers based on Thévenin theorem)

Francisco J. Arnold¹

Faculdade de Tecnologia, Universidade Estadual de Campinas, Limeira, SP, Brazil

Recebido em 27/1/2009; Aceito em 27/7/2009; Publicado em 18/2/2010

Neste trabalho é apresentado um método de análise de transdutores piezelétricos baseado numa simplificação do circuito elétrico equivalente de Mason. Empregou-se uma adaptação do teorema de Thévenin para analisar o comportamento de transdutores piezelétricos usados como transmissores (conversão de energia elétrica em mecânica), levando em conta uma configuração tipicamente empregada em aplicações de alta potência. Os transdutores foram modelados uni-dimensionalmente considerando-se apenas modos de vibração longitudinais. Um circuito elétrico equivalente foi obtido e simulado computacionalmente. Os resultados experimentais e os calculados pelo modelo elétrico apresentaram bom ajuste. Aspectos referentes à simplificação do modelo empregado e sua viabilidade para ensino são discutidos.

Palavras-chave: transdutores, modelo de Mason, circuitos elétricos.

In this work, a method of analysis of piezoelectric transducers is shown. This method is based on the simplification of Mason's equivalent electric circuit. An adaptation of Thévenin theorem has been employed to study the behavior of piezoelectric transducers used as transmitters (electric into mechanic energy conversion). This study was restricted to transducers with a typical configuration employed in high power applications. The transducers were one-dimensionally modeled, considering only longitudinal vibration modes. An equivalent electric circuit was obtained and computationally simulated. The experimental and calculated results show a good fitting. Features related to the simplification of the model employed and their feasibility for teaching are discussed.

Keywords: transducers, Mason's model, electric circuit.

1. Introdução

O teorema de Thévenin é um poderoso método de análise de circuitos elétricos e eletrônicos [1-4]. Pelo teorema de Thévenin qualquer circuito com dois terminais de saída pode ser substituído por um circuito equivalente constituído por uma fonte de tensão em série com uma impedância. Na Fig. 1 são apresentados um circuito genérico e seu respectivo equivalente de Thévenin. Se a intenção resume-se a investigar o comportamento elétrico em dispositivos conectados aos terminais de saída, este procedimento torna esta análise suficiente e muito simplificada.

Adicionalmente, com o circuito equivalente de Thévenin obtém-se imediatamente a impedância de saída do circuito original e, conseqüentemente, o valor da carga em que ocorre a máxima transferência de potência.

Nos cursos regulares de física, engenharias e tecnolo-

gias o conteúdo correspondente ao teorema de Thévenin é ministrado nas disciplinas de Física Básica, Circuitos Elétricos, Eletrônica ou outras correlatas. Portanto, isto cria um forte e exclusivo vínculo do uso do teorema de Thévenin com a análise de circuitos elétricos. No entanto, devido à similaridade das formulações das teorias elétrica e mecânica, os conceitos do teorema de Thévenin podem ser aproveitados não apenas em sistemas elétricos, mas também em sistemas mecânicos e híbridos.

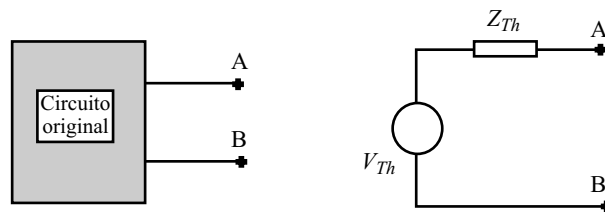


Figura 1 - Circuito elétrico original com 2 terminais de saída (caixa preta) e seu circuito equivalente de Thévenin.

¹E-mail: arnold@ft.unicamp.br.

Neste trabalho é empregada uma variação do teorema de Thévenin para simplificação de um sistema eletroacústico, particularmente, de transdutores piezelétricos usados em aplicações de ultra-som de alta potência. Do ponto de vista do ensino, a intenção é mostrar a abrangência e as potencialidades das aplicações do teorema de Thévenin para investigar o comportamento elétrico dos transdutores piezelétricos e estimular o estudante a buscar por outras aplicações onde o mesmo também possa ser empregado.

A análise de transdutores piezelétricos pode ser feita a partir de diferentes formulações [5-18]. Classicamente, a descrição dos modelos matemáticos dos transdutores piezelétricos é baseada na resolução das equações de onda, do eletromagnetismo e piezelétricas [10]. O procedimento consiste em utilizar soluções da equação de ondas em cada um dos meios de propagação e aplicar as condições de continuidade de deslocamento e força nas interfaces desses meios. Estas soluções, com auxílio das equações piezelétricas e do eletromagnetismo, conduzem à determinação da impedância elétrica do transdutor.

A utilização de circuitos elétricos equivalentes para a análise dos transdutores piezelétricos é muito atrativa, uma vez que a teoria de malhas elétricas encontra-se altamente desenvolvida e o poder das técnicas permite uma fácil associação com procedimentos experimentais ligados à caracterização elétrica. Há vários modelos de circuitos elétricos equivalentes encontrados na literatura técnica para analisar os transdutores piezelétricos. Ballato [19] apresenta uma ampla revisão sobre a história e a evolução dos modelos de transdutores piezelétricos e piezomagnéticos. No entanto, o escopo deste trabalho está direcionado para o uso do modelo de Mason [10, 20] que é adequado para aplicações com modelagem uni-dimensional dos tipos de transdutores abordados aqui.

Os transdutores piezelétricos utilizados em aplicações tecnológicas atuais de ultra-som são constituídos por cerâmicas piezelétricas acopladas a peças metálicas. Estes transdutores, sob diversas configurações, apresentam uma ampla gama de aplicações nas áreas industrial, médica e militar [21-23]. A inclusão de elementos não piezelétricos adjacentes, que são as peças metálicas, modifica as características vibracionais do transdutor como a amplitude, o fator de qualidade, as perdas e a frequência do sinal ultra-sônico que se deseja transmitir [10], de acordo com as necessidades das aplicações tecnológicas a que se destinam. Os transdutores piezelétricos utilizados em aplicações de potência elevada são, em grande parte, constituídos por cerâmicas piezelétricas e peças metálicas de contorno anular. Um parafuso que passa pelo furo central dessas peças aplica um pré-tensionamento mecânico ao conjunto [24]. A Fig. 2 mostra um esquema genérico desses transdutores. Os parâmetros físicos e as dimensões dos elementos do transdutor definem as frequências de res-

sonância do transdutor. Normalmente, estes transdutores operam em modos de vibração longitudinais e na frequência de ressonância ou próxima a ela. Na ressonância a amplitude de vibração é maximizada e, portanto, obtém-se a maior taxa de conversão de energia.

O comportamento físico das variáveis elétricas e mecânicas e a complexa interação que existe entre elas produzem um sistema cuja interpretação representa um grande desafio aos pesquisadores da área. Em geral, as modelagens são desenvolvidas sob condições de maior simplicidade do sistema. Dependendo do tipo de transdutor empregado, as simplificações tornam os resultados provindos da modelagem suficientes para o entendimento do fenômeno e projeto dos transdutores [25, 26].

A característica fundamental dos transdutores piezelétricos é o conjunto de suas frequências de ressonância e anti-ressonância. Essas ressonâncias são obtidas a partir da medição da impedância elétrica do transdutor em função da frequência de excitação. Valores mínimos e máximos do módulo da impedância associam-se às frequências de ressonância e anti-ressonância, respectivamente. Este procedimento pode ser realizado usando-se um impedômetro fasorial ou através do método da ressonância [27]. O segundo método é extremamente simples e pode ser realizado em qualquer laboratório de ensino.

O presente artigo visa ilustrar a utilização e as implicações das técnicas da análise de circuitos elétricos na modelagem dos transdutores piezelétricos como atividade de ensino. A proposta consiste em usar técnicas de análise de circuitos elétricos para reduzir o modelo de Mason a um circuito puramente elétrico e que possa ser usado como referência para confrontar dados com métodos experimentais obtidos a partir de procedimentos simplificados em laboratórios de ensino. A idéia central é a de usar um circuito equivalente de Thévenin adaptado para determinar as ressonâncias de transdutores piezelétricos, similares ao esquematizado na Fig. 2, operando no modo emissão.

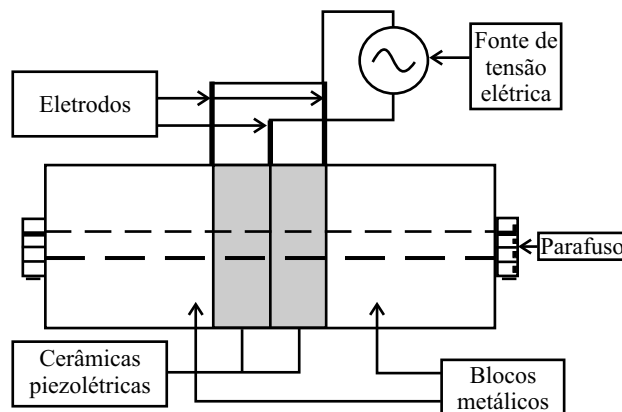


Figura 2 - Esquemática de um transdutor piezelétrico composto.

Em um trabalho anterior, Martin e Sigelmann

[18] fizeram uso do teorema de Thévenin mecânico para analisar efeitos da camada de retaguarda (*backing*) de transdutores piezelétricos de banda larga. O trabalho aqui apresentado foca uma avaliação da impedância elétrica dos transdutores piezelétricos com configurações adequadas para operações em altas potências. Devido à natureza da análise elétrica proposta, o circuito equivalente de Thévenin foi adaptado para incorporar exclusivamente características elétricas e, com isso, direcionar a modelagem e a metodologia experimental para técnicas relacionadas a teoria dos circuitos elétricos.

O estudo de transdutores piezelétricos por meio de circuitos elétricos equivalentes também busca facilitar o entendimento da semelhança nas formulações das teorias da mecânica e da eletricidade. Adicionalmente, este estudo amplia a motivação do aluno no aprendizado da física, uma vez que usa, diretamente, um dispositivo com finalidades tecnológicas.

2. Teoria

Nesta seção são apresentados os transdutores piezelétricos empregados neste estudo e seu respectivo circuito elétrico equivalente. Os transdutores são compostos de cerâmicas piezelétricas e peças metálicas anulares. Os eletrodos estão nas faces planas da cerâmica. Estas peças são mecanicamente pré-tensionadas [24, 28-30] por um parafuso que passa pelo furo central das peças. A Fig. 2 apresenta um diagrama esquemático dos transdutores utilizados. Além disso, é apresentado o procedimento para obtenção do circuito equivalente de Thévenin de uma cerâmica piezelétrica. As expressões das impedâncias mecânicas das cargas mecânicas que são submetidas aos equivalentes de Thévenin também são deduzidas e apresentadas.

Para efeito de simplificação do modelo elétrico, em todos os transdutores e seus componentes descritos será assumido que:

- os transdutores utilizados são isentos de perdas;
- seus modos de vibração permitem apenas propagação de ondas no eixo longitudinal;
- são simétricos, e considera-se o centro do conjunto engastado;

Os transdutores operam no modo emissão e são alimentados por uma tensão elétrica V , senoidal, com frequência angular, ω , dada em (rad/s).

Cada elemento empregado na construção do transdutor se apresenta como parte de uma linha de transmissão. No estudo das linhas de transmissão define-se a impedância mecânica característica [31,32] para as cerâmicas piezelétricas e peças metálicas, respectivamente, pelas Eqs. (1) e (2)

$$Z_0 = A_c \rho_c c_c, \quad (1)$$

$$Z_{0L} = A_a \rho_a c_a, \quad (2)$$

onde A_c e A_a são as áreas das seções transversais da cerâmica piezelétrica e da peça metálica, respectivamente, ρ_c e ρ_a são as densidades do meio de propagação da cerâmica e das peças metálicas e c_c , c_a são as velocidades de propagação das ondas na cerâmica piezelétrica e na peça metálica.

2.1. Cerâmica piezelétrica

O diagrama esquemático do circuito equivalente de Mason de uma cerâmica piezelétrica é mostrado na Fig. 3. Este circuito é obtido a partir da solução de equações piezelétricas, de ondas e do eletromagnetismo e encontra-se detalhada em [10]. Este circuito apresenta três portas, uma elétrica, denotada por V e duas mecânicas, denotadas por F_0 - F_1 e F_0 - F_2 . No modo transmissão, empregado neste estudo, na porta elétrica é aplicada uma tensão elétrica senoidal V e nas portas mecânicas são acopladas as cargas mecânicas. Há um transformador eletromecânico com relação de espiras de 1 para n . A este transformador está associado o fenômeno da conversão piezelétrica do transdutor.

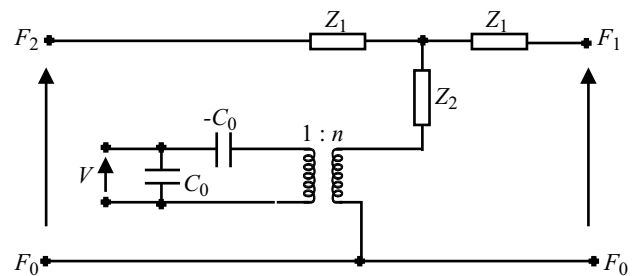


Figura 3 - Diagrama esquemático do circuito elétrico equivalente de Mason para uma cerâmica piezelétrica.

As impedâncias mecânicas deste circuito são dadas pelas Eqs. (3) e (4)

$$Z_1 = jZ_0 \tan\left(\frac{k_c l_c}{2}\right), \quad (3)$$

$$Z_2 = -jZ_0 \csc(k_c l_c), \quad (4)$$

onde k_c é a constante de propagação dada pela Eq. (5)

$$k_c = \frac{\omega}{c_c}, \quad (5)$$

onde l_c é a espessura da cerâmica piezelétrica. C_0 é a capacitância intrínseca da cerâmica piezelétrica, determinada quando a deformação é nula, n é o fator de conversão do transformador eletromecânico dado pela Eq. (6)

$$n = h_{33} C_0, \quad (6)$$

onde h_{33} é o coeficiente piezelétrico.

2.2. Elemento não piezolétrico

Um bloco metálico é um elemento não piezolétrico, chamado de elemento passivo do transdutor. Na Fig. 4 é mostrado um circuito elétrico equivalente para este elemento. Pode-se notar a semelhança entre este circuito e o da Fig. 3. A parte mecânica é disposta da mesma forma.

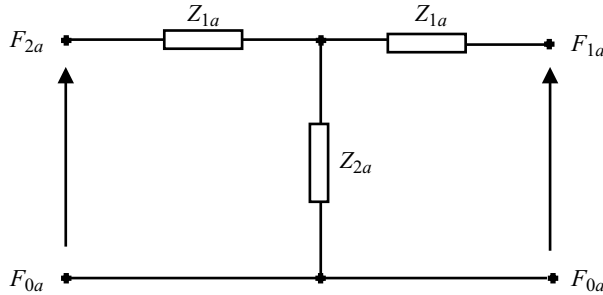


Figura 4 - Diagrama esquemático do circuito elétrico equivalente de uma peça metálica.

As impedâncias dos elementos da peça metálica são dadas pelas Eqs. (7) e (8)

$$Z_{1a} = jZ_{0a} \tan\left(\frac{k_a l_a}{2}\right), \quad (7)$$

$$Z_{2a} = -jZ_{0a} \csc(k_a l_a), \quad (8)$$

onde k_a é a constante de propagação do elemento passivo

$$k_a = \frac{\omega}{c_a}, \quad (9)$$

onde l_a é o comprimento do elemento passivo.

2.3. Circuito de Thévenin de uma cerâmica piezolétrica

Levando-se em conta que o centro do transdutor encontra-se engastado, cada metade da parte piezolétrica, que corresponde a uma cerâmica piezolétrica, pode ser representada por um equivalente de Thévenin. Para determinar o circuito equivalente de Thévenin, a porta mecânica do circuito de Mason apresentado na Fig. 3 que está voltada para o centro do transdutor é deixada em aberto. Dessa forma, ela representa o comportamento engastado da parte central do transdutor. Assim, como exemplo, para determinar o circuito equivalente de Thévenin da porta F1-F0, F2-F0 fica em aberto, calcula-se a tensão mecânica entre os terminais F1-F0 e a impedância “vista” a partir destes com as fontes de tensão elétrica em curto-circuito.

Este procedimento leva ao equivalente de Thévenin mecânico do transdutor, formado pela tensão mecânica de Thévenin, V_{Thmec} e pela impedância mecânica, Z_{Thmec} , dados pelas Eqs. (10) e (11).

$$V_{Thmec} = V_2, \quad (10)$$

$$Z_{Thmec} = Z_1 + Z_2 - \frac{n^2}{j\omega C_0}. \quad (11)$$

Com auxílio das relações do transformador ideal, dados pelas Eqs. (12)-(14) obtém-se a projeção da parte mecânica no lado elétrico do modelo de Mason.

$$\frac{V_p}{V_s} = \frac{1}{n}, \quad (12)$$

$$\frac{I_p}{I_s} = n, \quad (13)$$

$$\frac{Z_p}{Z_s} = \frac{1}{n^2}, \quad (14)$$

onde os índices p e s denotam os enrolamentos primário e secundário do transformador eletromecânico.

As Eqs. (15) e (16) apresentam as expressões da impedância elétrica correspondente à parte mecânica do transdutor e a fonte de tensão elétrica equivalente

$$V_{Thel} = V_1, \quad (15)$$

$$Z_{Thel} = \frac{Z_1 + Z_2}{n^2} - \frac{1}{j\omega C_0}. \quad (16)$$

Acrescentando-se o capacitor de capacitância C_0 , referente à parte puramente elétrica do elemento piezolétrico, obtém-se o circuito mostrado na Fig. 5. A partir deste circuito pode-se descrever o comportamento do transdutor piezolétrico sob o ponto de vista elétrico. Elementos mecânicos passivos que correspondem a cargas mecânicas, modelados como um circuito apresentado na Fig. 4, podem ser acoplados às saídas A e B.

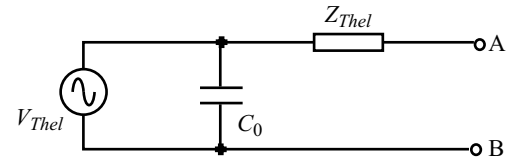


Figura 5 - Circuito elétrico equivalente de Thévenin adaptado de uma cerâmica piezolétrica.

O circuito obtido corresponde a um equivalente de Thévenin modificado. Esta modificação corresponde à inclusão de uma capacitância C_0 ligada em paralelo com a fonte de tensão. Colocando-se os terminais A e B em curto-circuito pode-se determinar a corrente que flui no capacitor C_0 e em Z_{Thel} . Esta última pode ser convertida em velocidade de vibração dividindo-a por n . A soma fasorial dessas correntes resulta na corrente total fornecida pela fonte de alimentação. A partir disso, pode-se determinar a impedância elétrica do transdutor conforme se dispõe na literatura [10, 20].

A Fig. 6 mostra o circuito completo para um transdutor considerando-se que cada metade apresenta um equivalente de Thévenin próprio. No caso de transdutores simétricos estes circuitos são iguais.

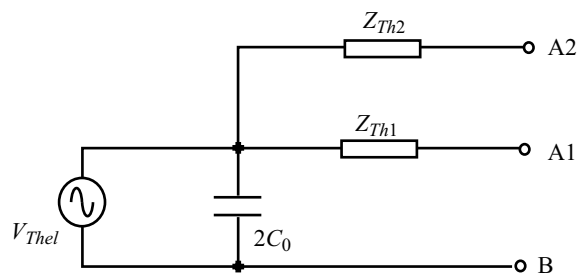


Figura 6 - Circuito elétrico equivalente de um transdutor composto similar ao apresentado na Fig. 2.

2.4. Cargas mecânicas dos transdutores

As cargas, evidentemente, têm uma das extremidades em contato com a estrutura do transdutor. A segunda extremidade poderá ficar livre ou engastada. As expressões para as impedâncias mecânicas (Z_L) das cargas livres e engastadas são dadas pelas Eqs. (17) e (18), respectivamente

$$Z_L = jZ_{0L} \tan(k_L l_L), \quad (17)$$

$$Z_L = -jZ_{0L} \cot(k_L l_L), \quad (18)$$

Z_{0L} , k_L e l_L são, respectivamente, a impedância característica, a constante de propagação e o comprimento do parafuso, já similarmente definidos.

Estas equações são obtidas pelo cálculo da impedância equivalente da carga. Tomando como referência o diagrama esquemático da Fig. 4, quando a carga possui uma de suas extremidades livre, os terminais referentes a esta face são curto-circuitados. No caso de extremidade engastada, os terminais são deixados em aberto.

3. Metodologia

A metodologia apresentada consiste de procedimentos experimentais e cálculos computacionais. O procedimento experimental apresentado visa a determinação das frequências de ressonância e anti-ressonância do primeiro modo de vibração longitudinal. O intuito é comparar os resultados experimentais com os calculados a partir do circuito elétrico equivalente proposto.

3.1. Procedimento experimental

Quatro transdutores similares ao esquematizado na Fig. 2 foram montados. Estes transdutores são simétricos, os blocos metálicos são de alumínio e o parafuso central aplica um pré-tensionamento mecânico de aproximadamente 30 MPa ao conjunto para garantir uma boa conexão entre as partes. O valor do pré-tensionamento mecânico é estimado baseado numa curva de calibração anteriormente obtida [29]. Os transdutores são denominados T1, T2, T3 e T4 e se

diferenciam pelo comprimento de cada peça de alumínio. Os comprimentos medem 32,5 mm, 33 mm, 35 mm e 37,5 mm, respectivamente.

As cerâmicas piezelétricas utilizadas foram fornecidas pela Thornton-Inpec, Brasil. Atualmente, esta empresa não mais comercializa estas cerâmicas. O fabricante não informou o material e a composição dessas peças. Os parâmetros físicos das cerâmicas piezelétricas foram determinados por meio de metodologia convencional [27]. O valor do coeficiente elástico com deslocamento elétrico nulo, c_{33}^D , é $13,9 \times 10^{10}$ N/m²; o coeficiente piezelétrico, h_{33} , $14,8 \times 10^8$ N/C; o coeficiente elétrico com a superfície engastada é $\varepsilon_{33}^S = 11 \times 10^{-9}$ F/m; a espessura da cerâmica mede 6,3 mm e os raios interno e externo das peças anulares são de 6,3 mm e 19,0 mm. A área da seção transversal das cerâmicas é 1009,4 mm². A capacitância intrínseca é 3,70 nF. Os valores informados são as médias determinadas a partir de 20 amostras.

As peças de alumínio também possuem contorno anular e apresentam as mesmas dimensões radiais das cerâmicas. A velocidade de propagação das ondas e a densidade do alumínio são 6420 m/s e 2700 kg/m³, respectivamente.

A determinação da impedância dos transdutores em função da frequência de excitação foi feita usando-se o método da linha de transmissão [33], como uma variação do método da ressonância [27]. A Fig. 7 mostra a esquematização da montagem utilizada para realizar as medições.

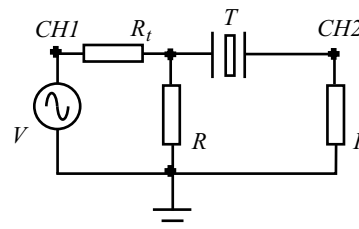


Figura 7 - Representação esquemática da utilização do método da ressonância para caracterização do comportamento elétrico de um transdutor piezelétrico. No circuito, V é um gerador de funções, $CH1$ e $CH2$ são os canais de entrada vertical de um osciloscópio, R são resistores de 100 Ω , R_t é um resistor de 1 k Ω e T é o transdutor a ser caracterizado.

A condução do experimento é trivial. No terminal CH1 está ligado o canal 1 do osciloscópio que mede a tensão fornecida pelo gerador de funções. No terminal CH2 está ligado o canal 2 do osciloscópio que mede a tensão elétrica no resistor R , que é proporcional a corrente elétrica que circula pelo transdutor. A frequência do sinal produzido pelo gerador de funções é variada e são observados os valores da tensão no resistor R (CH2). Com os valores mínimos e máximos da corrente, as frequências de ressonância e anti-ressonância do transdutor e, com operações elementares de análise de circuitos elétricos, pode-se calcular a impedância elétrica do mesmo. O osciloscópio utilizado foi o TDS1002

da Tektronix. Este instrumento mede os valores das tensões e frequências com precisão de até 4 casas após a vírgula. Erros aleatórios nas medições foram minimizados restringindo a leitura a apenas duas casas após a vírgula nas medições.

3.2. Cálculos das ressonâncias e anti-ressonâncias

O cálculos das ressonâncias e das anti-ressonâncias foram feitos tomando como base o circuito da Fig. 8. Uma carga mecânica com uma de suas extremidades livre é conectada ao circuito elétrico equivalente proposto na Fig. 5.

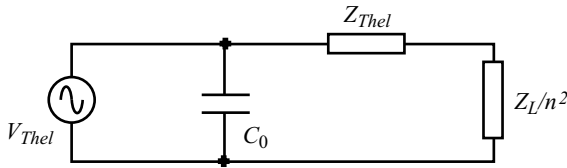


Figura 8 - Circuito elétrico equivalente correspondente ao transdutor piezelétrico analisado.

O ramo mecânico possui duas reatâncias ligadas em série. Nas frequências em que elas se anulam ($Z_{thel} = -Z_L/n^2$), temos a ressonância. Na ressonância, a energia armazenada em um dos elementos é igual à fornecida pelo outro. Nesta condição, a corrente que circula pelo ramo mecânico, que pode ser transformada em velocidade de vibração se for dividida por n , torna-se máxima. Consequentemente, a corrente total pelo transdutor também será máxima.

A condição de ressonância é expressa pela Eq. (19)

$$\frac{n^2}{\omega_r C_0} = -Z_0 \cot\left(\frac{\omega_r}{v_c} l_c\right) + Z_{0L} \tan\left(\frac{\omega_r}{v_L} l_L\right), \quad (19)$$

onde ω_r é a frequência angular de ressonância do transdutor.

Por outro lado, as reatâncias ligadas em série correspondentes ao ramo mecânico também se encontram em paralelo com o capacitor C_0 . Isto faz com que numa dada frequência, chamada de anti-ressonância,

as reatâncias do capacitor C_0 e do ramo mecânico se igualem ($X_{C_0} = Z_{thel} + Z_L/n^2$). Com isso, se estabelece uma situação similar a de um circuito LC em paralelo. A energia armazenada fica “aprisionada” nestes ramos, fazendo com que ocorra a anulação da corrente total no transdutor. Equivalentemente, na prática, isto resulta em um valor elevado de impedância elétrica do transdutor. A Eq. (20) relaciona os parâmetros físicos do transdutor com a frequência de anti-ressonância.

$$0 = -Z_0 \cot\left(\frac{\omega_a}{v_c} l_c\right) + Z_{0L} \tan\left(\frac{\omega_a}{v_L} l_L\right), \quad (20)$$

onde ω_a é a frequência angular de ressonância do transdutor.

As Eqs. (19) e (20) não possuem soluções analíticas, mas podem ser resolvidas numericamente por métodos iterativos [34, 35]. Os programas para solução destas equações foram escritos no software Matlab produzido pela MathWorks Co. Este software possui comandos que resolvem estas equações de modo direto e agilizam a realização das tarefas.

4. Resultados

No procedimento experimental de determinação das ressonâncias e anti-ressonâncias são observadas frequências que devem ser provenientes de diferentes modos de vibração. Alguns desses modos não são previstos na modelagem aqui apresentada.

A Tabela 1 relaciona os resultados obtidos experimentalmente e pelos cálculos realizados computacionalmente. Os erros dos valores são estimados em 0,01 kHz.

Para efeito de discussões voltadas ao entendimento dos princípios físicos da ressonância e da anti-ressonância nos transdutores piezelétricos são apresentados nas Figs. 9, 10 e 11 gráficos resultantes das simulações das impedâncias em função da frequência do transdutor T1. Simulações referentes aos outros transdutores apresentam resultados similares.

Tabela 1 - Ressonâncias e anti-ressonâncias obtidas experimentalmente e calculadas computacionalmente.

Transdutor	Espessura (peça de alumínio) l_a (mm)	Experimental		Computacional	
		f_r (kHz)	f_a (kHz)	f_r (kHz)	f_a (kHz)
T1	32,5	40,50	42,20	41,50	42,66
T2	33	40,67	42,00	40,97	42,11
T3	35	36,30	38,30	39,01	40,03
T4	37,5	35,41	36,42	36,79	37,69

5. Discussões

Foi apresentado neste trabalho um estudo sobre transdutores piezelétricos em configurações similares às encontradas comercialmente para aplicações de ultra-som de potência. Os experimentos foram conduzidos com transdutores fabricados de maneira simples, sem levar em conta situações em que os mesmos pudessem ser expostos às típicas condições extremas de operação dos transdutores comerciais. Dessa forma, os transdutores não foram excitados com tensões elevadas, o que os isenta do aquecimento e das largas deformações, mas com potências reduzidas de modo a preservar suas respostas lineares e desconsiderar as perdas. Como a proposta do trabalho é voltada ao ensino, tal simplificação permite que os transdutores possam ser montados em laboratórios de ensino com poucos recursos e sem técnica apurada.

Os transdutores nestas configurações apresentam ressonâncias em baixas frequências, da ordem de dezenas de kiloHertz. Este aspecto também é favorável para aplicações em ensino, uma vez que ocorrência de interferências no procedimento experimental é minimizada.

Os resultados experimentais estão próximos àqueles obtidos com cálculos a partir do circuito elétrico equivalente proposto. Valores mínimos e máximos que não estão contemplados pelo modelo resultam de outros modos de vibração como, por exemplo, os radiais. Isto é esperado, uma vez que o modelo empregado restringe-se a uma análise uni-dimensional. A inclusão do parafuso na modelagem agrega outros modos de vibração [36] que não foram considerados neste estudo. Os desvios observados entre os dados experimentais e os calculados podem ser atribuídos a divergências entre o valor real das características físicas dos materiais usados nos transdutores e aqueles atribuídos no modelo. Os valores dos parâmetros físicos lançados nos cálculos são advindos de Tabelas [32]. Outro efeito que também pode contribuir para estas divergências é o nível do pré-tensionamento mecânico aplicado aos transdutores. As ressonâncias e anti-ressonâncias dos transdutores podem variar dependendo do pré-tensionamento mecânico aplicado ao mesmo [29, 30].

A utilização do circuito elétrico mostrado na Fig. 5 simplifica a determinação da impedância elétrica do transdutor. A inclusão de outros elementos na estrutura do transdutor pode ser tratada como impedâncias que se ligam em série com a impedância de Thévenin do sistema original (Z_{Thel}). Evidentemente, a impedância mecânica destas novas peças deve ser dividida pelo fator n^2 para que seus efeitos mecânicos possam ser contabilizados como impedâncias elétricas refletida na parte elétrica do circuito.

As duas cerâmicas piezelétricas estão dispostas mecanicamente em série no transdutor, com isso pode-se admitir que o centro do sistema encontra-se engas-

tado. Esta condição é fundamental para a determinação do equivalente de Thévenin, pois garante que em uma das portas mecânicas a velocidade de vibração seja nula. Esta condição foi atribuída à porta mecânica, denotada por F0-F2, no circuito da Fig. 3. Cada lado do transdutor apresenta um circuito equivalente similar ao mostrado na Fig. 6. A determinação das ressonâncias e anti-ressonâncias de um transdutor que não seja simétrico deve empregar circuitos equivalentes de ambos os lados do transdutor.

O comportamento físico de Z_{Thel} é expresso pela Eq. (21). Esta equação mostra que o comportamento da componente da impedância elétrica que está relacionada aos efeitos mecânicos da cerâmica é regido por uma função complexa, apenas com componente imaginária e forma de cotangente somada aos efeitos da capacitância negativa expressa no modelo de Mason. Portanto, seu comportamento está relacionado a uma reatância que pode ter natureza capacitiva ou indutiva.

$$Z_{Thel} = \frac{-jZ_0 \cot(k_c l_c)}{n^2} + \frac{j}{\omega C_0}. \quad (21)$$

A Eq. (22) também apresenta os efeitos elétricos produzidos pela presença da carga mecânica Z_L . Esta carga encontra-se com uma das faces livre e a outra em contato com a cerâmica. Devido a esta condição, sua resposta também é uma função complexa, puramente imaginária, porém com forma tangencial. Nestas condições, o comportamento elétrico dela, refletido na parte elétrica, está vinculado a uma reatância capacitiva ou indutiva.=

$$Z_L = \frac{jZ_{0L} \tan(k_a l_a)}{n^2}. \quad (22)$$

Em baixas frequências o comportamento desta função indica valores positivos e, portanto, ligado a uma reatância indutiva.

Usando-se o circuito da Fig. 8 e as impedâncias definidas pelas Eqs. (21) e (22), pode-se descrever o comportamento elétrico do transdutor piezelétrico em termos de seus modos de vibração longitudinal em toda a faixa de frequência. As expressões das impedâncias apresentadas nas Eqs. (21) e (22) podem ser aproximadas pelas de impedâncias elétricas de circuitos LC. As funções da cotangente e da tangente, próximas ao zero, apresentam formas que se assemelham ao comportamento de um circuito formado por um indutor e um capacitor em paralelo e em série, respectivamente [10, 20]. No entanto, tal procedimento limita a descrição do comportamento do transdutor nas proximidades da primeira ressonância.

O sinal assumido pelos valores das funções das impedâncias (Z_{Thel} e Z_L) indica como se dá o armazenamento da energia. Do ponto de vista elétrico, o sinal negativo da função da impedância associa-se à reatância capacitiva e o positivo à reatância indutiva. Pela similaridade das formulações das teorias da eletricidade

e da mecânica, as cargas elétricas (Q) estão ligadas ao deslocamento (x) e a corrente elétrica (I) à velocidade de vibração (v). Quando prevalece o comportamento capacitivo, a energia armazenada no capacitor (E_{cap}) é proporcional ao quadrado das cargas elétricas armazenadas, portanto, o sinal negativo da impedância indica maior acúmulo de energia potencial (E_{pot}). Por

outro lado, quando o sinal é positivo, a energia cinética armazenada (E_{cin}) é maior, pois a energia armazenada em um indutor (E_{ind}) é proporcional ao quadrado da corrente elétrica. A Tabela 2 resume o relacionamento entre estas grandezas físicas. Nota-se também a associação da capacitância (C) com a constante elástica (k) e da indutância (L) com a massa (m).

Tabela 2 - Relação entre sinais das funções da impedância e das energias armazenadas/fornecidas.

Sinal da função (Z_{Thel} e Z_L)	Reatância	Energia elétrica armazenada/fornecida	Energia mecânica armazenada/fornecida
-	Capacitiva	$E_{cap} = Q^2/2C$	$E_{pot} = kx^2/2$
+	Indutiva	$E_{ind} = LI^2/2$	$E_{cin} = mv^2/2$

Na Fig. 9 é mostrado o comportamento da impedância elétrica do transdutor piezelétrico T1 próximo à ressonância (valor mínimo) e a anti-ressonância (valor máximo). A Fig. 10 mostra o comportamento do mesmo transdutor em termos da definição da sua frequência de ressonância em que as impedâncias Z_{thel} e Z_L se anulam. Nesta frequência as energias potencial e mecânica dos componentes do ramo mecânico são iguais. Neste caso, a quantidade de energia armazenada por um elemento reativo é igual a fornecida pelo outro.

Na Fig. 11 destacam-se as curvas da impedância mecânica total convertida na parte elétrica e da reatância capacitiva da cerâmica piezelétrica. Estas impedâncias se anulam na frequência de anti-ressonância. Aqui também se manifesta um fenômeno de ressonância com equivalência entre as energias fornecidas e armazenadas pelos ramos mecânico e elétrico do transdutor.

O estudo dos sinais das funções nas Figs. 10 e 11 contribui para uma análise das energias armazenadas nas partes do transdutor. Este análise também pode ser explorada em atividades interdisciplinares ligadas ao ensino da matéria matemática.

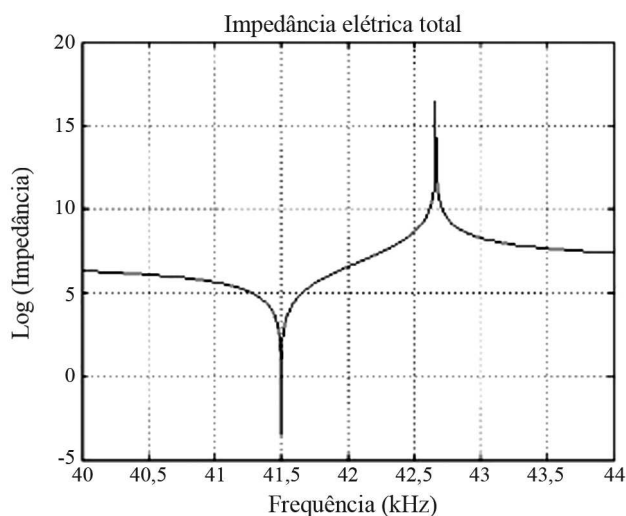


Figura 9 - Logaritmo do módulo da impedância elétrica (Ω) do transdutor T1 em função da frequência em kHz.

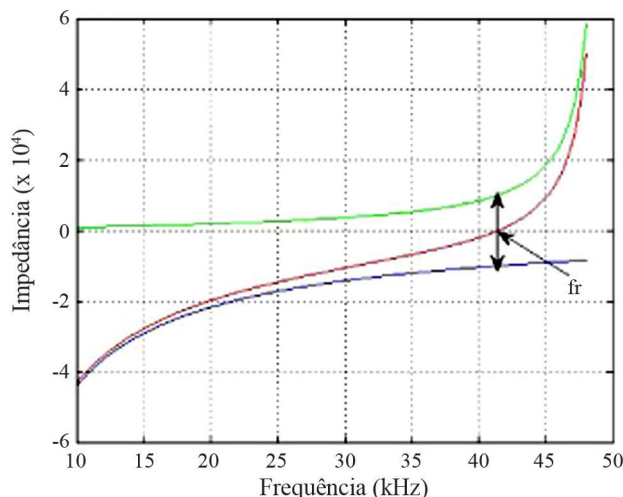


Figura 10 - Impedância mecânica da carga mecânica projetada na parte elétrica, Z_L/n^2 , (em verde), impedância mecânica da porção mecânica da cerâmica piezelétrica projetada na parte elétrica, Z_{Thel} , (em azul) e impedância mecânica total projetada na parte elétrica, $Z_{Thel} + Z_L/n^2$, (em vermelho) em Ω em função da frequência de excitação (kHz). No ponto que assinala a frequência de ressonância ($fr = 41,50$ kHz) os valores de Z_{Thel} e Z_L/n^2 se cancelam.

Outro ponto a considerar é o fato que conceitos abstratos como a capacitância negativa e o transformador eletromecânico presentes no modelo de Mason não aparecem diretamente na análise do circuito equivalente resultante. Do ponto de vista de uma atividade de ensino voltada para estudantes de disciplinas elementares de física, isto contribui para simplificar o entendimento do fenômeno.

As expressões das impedâncias e o circuito equivalente proposto determinam uma considerável simplificação na análise do comportamento das frequências de ressonância e anti-ressonância dos transdutores piezelétricos apresentados neste trabalho. Um programa simples, que pode ser escrito em Matlab, calcula as raízes das Eqs. (19) e (20) e fornece as ressonâncias e anti-ressonâncias do transdutor. Evita-se, com isso, análises em circuitos elétricos equivalentes mais complexos ou trabalhos computacionais mais volumosos como quando se usa métodos relacionados à cadeia de

matrizes [11-17].

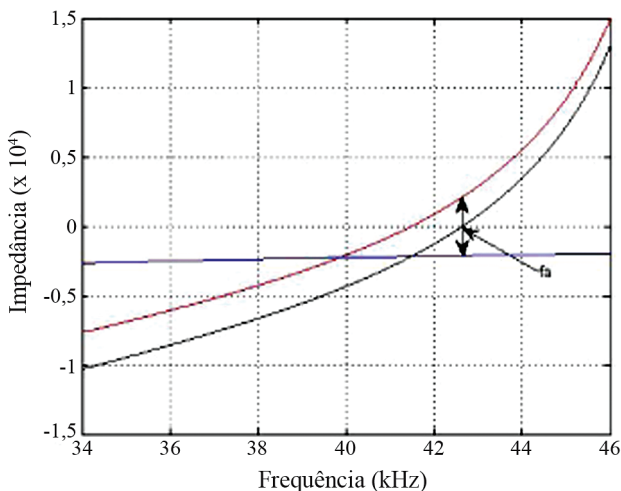


Figura 11 - Impedância mecânica total do transdutor, $Z_{TheL} + Z_L/n^2$, (em vermelho), reatância capacitiva intrínseca da cerâmica piezelétrica, X_0 , (em azul), soma das anteriores (em preto) em função da frequência em Ω em função da frequência de excitação em kHz. No ponto que assinala a frequência de antiressonância ($f_a = 42,66$ kHz) os módulos de $Z_{TheL} + Z_L$ e X_0 se cancelam.

Alternativamente, como atividade de ensino, pode-se também escrever programas de computador para calcular as correntes elétricas que fluem pelo circuito da Fig. 8. Isto permite relacionar a intensidade da corrente elétrica fornecida pela fonte excitadora do transdutor com a velocidade de vibração e a corrente elétrica que flui pela capacitância intrínseca da cerâmica piezelétrica.

6. Conclusões

O emprego de um circuito equivalente de Thévenin em um sistema eletromecânico contribui para incentivar o estudante a utilizar métodos de resolução de malhas de circuitos elétricos em problemas mecânicos ou eletromecânicos. Este aspecto é importante no sentido de desvincular a exclusividade do uso dos equivalentes de Thévenin em análise de problemas puramente elétricos.

O trabalho apresentado ilustra uma atividade de análise elétrica do comportamento de transdutores piezelétricos baseada em circuitos elétricos equivalentes simples. Tal análise é acessível a estudantes de cursos introdutórios de física e permite associar a investigação do comportamento de um dispositivo tecnológico como atividade multidisciplinar que explora conceitos elementares de eletricidade, mecânica, matemática e computação.

Referências

[1] R. Boylestad, *Introdução à Análise de Circuitos* (Prentice Hall, São Paulo, 2004).

[2] J. Nilsson e S. Riedel, *Circuitos Elétricos* (Prentice Hall, São Paulo, 2008).

[3] J.D. Irwin, *Introdução à Análise de Circuitos Elétricos* (LTC, Rio de Janeiro, 2005).

[4] Y. Burian Jr. e A.C.A. Lyra, *Circuitos Elétricos* (Prentice Hall, São Paulo, 2006).

[5] M. Brissaud, *IEEE Transaction on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control* **38**, 603 (1991).

[6] A. Iula, N. Lamberti and M. Pappalardo, *IEEE Transaction on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control* **45**, 1056 (1998).

[7] N. Lamberti, F.R. Montero de Espinosa, A. Iula and R. Carotenuto, *IEEE Transaction on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control* **48**, 113 (2001).

[8] A. Iula, R. Carotenuto and M. Pappalardo, *Journal of the Acoustical Society of America* **111**, 2675 (2002).

[9] C.H. Huang, Y.C. Lin and C.C. Ma, *IEEE Transaction on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control* **51**, 12 (2004).

[10] D. Berlincourt, D. Curran and H. Jaffe, *Physical Acoustics* **1**, 170 (1964).

[11] G. Martin, *Journal of the Acoustical Society of America* **36**, 1366, (1964).

[12] E.K. Sittig, *IEEE Transactions on Sonics and Ultrasonics* **14**, 167 (1967).

[13] R. Hill and S. El Dardiry, *Journal of the Acoustical Society of America* **67**, 673 (1980).

[14] R. Hill and S. El-Dardiry, *Ultrasonics* **January**, 9 (1981).

[15] Y. Jayet, F. Lakestani and M. Perdrux, *Ultrasonics* **July**, 177 (1983).

[16] D. Powel, G. Hayward and R. Ting, *IEEE Transaction on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control* **45**, 667 (1998).

[17] J.L. Dion, F. Galindo and K. Agbossou, *IEEE Transaction on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control* **44**, 1120 (1997).

[18] R. Martin and R. Sigelmann, *Journal of the Acoustical Society of America* **58**, 475 (1975).

[19] A. Ballato, *IEEE Transaction on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control* **48**, 1189 (2001).

[20] W.P. Mason, *Electromechanical Transducers and Wave Filters* (D. Van Nostrand Company, Princeton, 1948).

[21] S. van Randeraat and R. Settrington, *Piezoelectric Ceramics* (Ed. Mullard Ltd, London, 1974).

[22] A. Arnau, *Piezoelectric Transducers and Applications* (Springer, Berlin, 2004).

[23] J.A. Gallego-Juarez, *Journal of Physics E: Scientific Instruments* **22**, 804 (1989).

[24] H. Miller, *Journal of the Acoustical Society of America* **35**, 1455 (1963).

[25] R. Coates and R.F. Mathams, *Ultrasonics* **26**, 59 (1988).

[26] O.B. Wilson, in *Proceedings of the International Workshop, Lille, France, 1987*, p. 3.

- [27] ANSI/IEEE, 1978 *Standard on Piezoelectricity* 176.
- [28] H. Bodholt, *Journal of the Acoustical Society of America* **98**, 1225 (1995).
- [29] F.J. Arnold and S.S. Mühlen, *Ultrasonics* **39**, 1 (2001).
- [30] F.J. Arnold and S. S. Mühlen, *Ultrasonics* **39**, 7 (2001).
- [31] L. Kinsler, A. Frey, A. Coppens and J. Sanders, *Fundamentals of Acoustics*, (John Wiley & Sons, Nova York, 2000).
- [32] V. Ristic, *Principles of Acoustic Devices* (John Wiley & Sons, Nova York, 1983).
- [33] L. Shuyu, *Ultrasonics* **43**, 365 (2005).
- [34] M.C. Cunha, *Métodos Numéricos* (Editora da UNICAMP, Campinas, 2003).
- [35] M.A.G. Ruggiero e V.L.R. Lopes, *Cálculo Numérico - Aspectos Teóricos e Computacionais* (Editora Makron Books, São Paulo, 1996).
- [36] F.J. Arnold, in *Proceedings of Acoustics 8*, Paris, 2008, p. 4207.