

# As observações galileanas dos planetas mediceanos de Júpiter e a equivalência do MHS e do MCU

(The Galilean observations of Jupiter and its Medicean Stars and the Equivalence between SHM and UCM)

R.R. Cuzinato<sup>1</sup>, E.M. de Moraes, C. Naldoni de Souza

<sup>1</sup>Instituto de Ciência e Tecnologia, Universidade Federal de Alfenas, Cidade Universitária,  
Poços de Caldas, MG, Brasil

Recebido em 2/10/13; Aceito em 22/3/14; Publicado em 31/7/2014

Este trabalho tem como objetivo usar as características orbitais das quatro Luas Galileanas de Júpiter para mostrar a equivalência do movimento harmônico simples (MHS) com o movimento circular uniforme (MCU). Em nossos cálculos, empregamos os dados obtidos por Galileu Galilei em suas observações pioneiras com o primeiro telescópio da história, realizadas no começo de 1610, e reportadas na obra fundamental *Sidereus Nuncius*. Comparamos os desenhos de Galileu do *Sidereus Nuncius* com as imagens da posição de Júpiter e suas luas segundo o *Cartes du Ciel*, um programa *open-source* que funciona como efemérides interativa. Com os dados orbitais extraídos dos gráficos de separação angular dos Planetas Mediceanos até Jupiter, obtemos os raios das órbitas assumindo a terceira lei de Kepler.

**Palavras-chave:** Luas Galileanas; movimento harmônico simples; movimento circular uniforme.

The present work shows the equivalence between the simple harmonic motion and the uniform circular motion using the orbital parameters of the Galilean Moons of Jupiter. We use the data obtained by Galileo Galilei in 1610 with the very first telescope in history, which were published in the monumental book *Sidereus Nuncius*. We compare the Galilean diagrams featuring in *Sidereus Nuncius* with the images of Io, Europa, Ganymede and Callisto, obtained with the *Cartes du Ciel*, an open-source computer program that works as an interactive ephemerides. We obtain the Medicean Planets orbital radii by assuming Kepler's third law and using the orbital data calculated from the plots of the angular separation of the four moons from Jupiter as a function of time.

**Keywords:** Galilean moons; simple harmonic motion; uniform circular motion.

## 1. Introdução

*Ao sereníssimo Cosme II de Médicis,  
IV Grão-Duque da Toscana*  
(Galileu Galilei, na dedicatória de sua obra  
*Sidereus Nuncius*)

Em 1609, Galilei apontava sua luneta recém-construída para a Lua e Júpiter; e há 404 anos atrás, os resultados das observações do primeiro astrônomo na história da humanidade a usar um telescópio foram publicados no seu *Sidereus Nuncius* ou (numa tradução livre) *O Mensageiro das Estrelas*; e a mensagem de Galileu abalou o mundo!

O esquema aristotélico de descrição da natureza baseia-se na associação a formas geométricas harmoniosas. Assim, a Lua era tida como uma esfera

perfeita desde a época dos gregos. Galileu observou, com ajuda de seu telescópio, as irregularidades da superfície lunar, suas depressões e elevações. Ele conseguiu até mesmo medir a altura de algumas das montanhas da Lua e verificar que elas possuíam dimensões comparáveis as que conhecemos na Terra. Com isso, Galilei derrubava as consagradas ideias de Aristóteles.

Não bastassem essas críticas (suficientemente desagradáveis até para algumas das pessoas mais esclarecidas da época), outras mais contundentes vieram: as informações das observações de Júpiter fizeram ruir o castelo das ideias geocentristas defendidas pela Igreja.

Com seu “óculo astronômico”, Galileu verificou que Júpiter possuía quatro “estrelas companheiras”, objetos celestes luminosos móveis, em contraponto com as “estrelas fixas” da abóboda celeste. As “es-

<sup>1</sup>E-mail: cuzinato@gmail.com.

telas móveis” identificadas por Galilei são as quatro luas maiores de Júpiter: Io, Europa, Ganimedes e Calisto. Hoje sabemos que elas são do tamanho da Lua ou mesmo de Mercúrio.

Galileu representou as suas descobertas na forma de figuras detalhadas do posicionamento das estrelas errantes – ou “Planetas Mediceanos”, como as cunhou – com respeito a Júpiter em dias consecutivos de observações, como exemplificado na Fig. 1.

A posição de Calisto em relação à Júpiter foi medida meticulosamente por Galileu ao longo de muitas noites. Como mostraremos em detalhe na Seção 5, os dados colhidos podem ser colecionados como pontos em um gráfico de distância angular até Júpiter como função do tempo de observação (Fig. 2).

O ajuste de uma função nos pontos do gráfico da Fig. 2 sugere que o ângulo  $\theta(t)$  de separação entre Calisto e Júpiter é uma função periódica do tipo seno ou cosseno

$$\theta(t) = \theta_{\max} \sin(\omega t + \varphi_0), \quad (1)$$

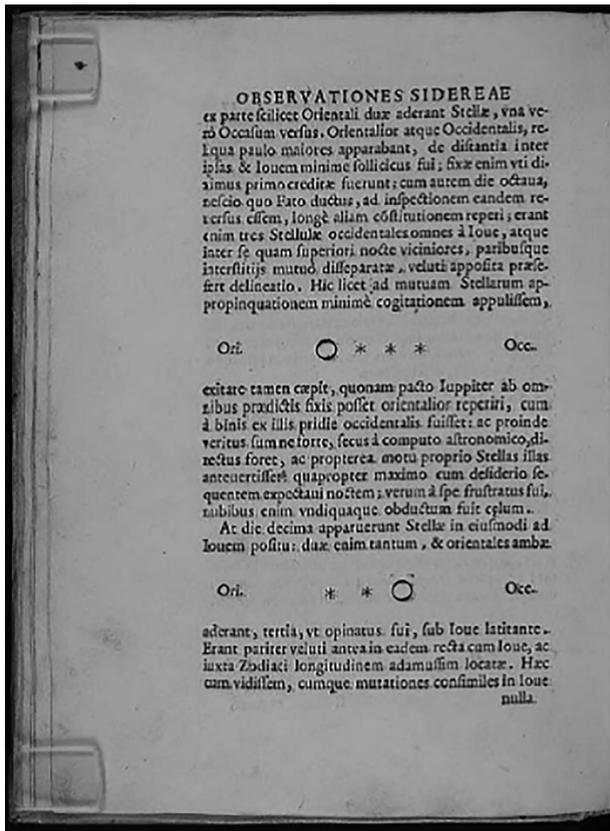


Figura 1: Posição relativa das “estrelas móveis” de Júpiter identificadas por Galilei conforme um dos diagramas encontrados no *Sidereus Nuncius*.

<sup>2</sup>Essa seção deve ser entendida como um formulário de apoio (*vade mecum*). As Refs. [2] e [3] tratam em detalhe dos MHS e MCU.

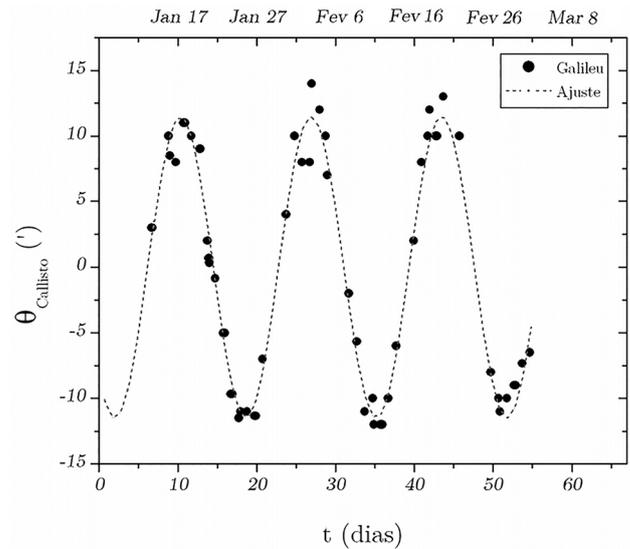


Figura 2: O ângulo entre Calisto e Júpiter do ponto de vista de um observador na Terra (Galileu!).

em que  $\theta_{\max}$  é a amplitude, ou seja, o afastamento máximo de Calisto em relação à Júpiter.  $\theta_{\max}$  é o valor no eixo  $y$  correspondente aos picos (ou vales) da função ajustada. A Eq. (1) é uma função típica do movimento harmônico simples, um exemplo de movimento encontrado em sistemas físicos como o conjunto massa-mola em oscilação sobre um plano sem atrito.

Ao ajustar a função seno aos pontos do gráfico, obtém-se a frequência angular  $\omega$ , conseqüentemente o período de “oscilação” de Calisto em torno de Júpiter,

$$T = \frac{2\pi}{\omega}. \quad (2)$$

Veremos que seguindo esse procedimento pode-se calcular:  $T = 16,6$  dias.

Mas a grande pergunta é: as Eqs. (1) e (2) implicam, então, que Calisto e Júpiter formam um sistema massa-mola? A resposta é um sonoro NÃO! Seria irracional pensar que uma mola invisível gigante de massa nula estivesse a puxar Calisto de um lado a outro de Júpiter! Como explicar as observações, então?

## 2. MHS e MCU: *vade mecum*

Para descartar com propriedade a ideia absurda de que Júpiter e suas Luas Galileanas formam um sistema massa-mola, vamos lembrar rapidamente algumas características do movimento harmônico simples (MHS) e do movimento circular uniforme (MCU).<sup>2</sup>

O MHS é usualmente estudado em conexão com o sistema massa-mola. A força aplicada pela mola

ao bloco de massa  $m$  tem a magnitude dada pela lei de Hooke,  $F = -kx$ , sendo  $k$  a constante elástica da mola e  $x$  a deformação por ela sofrida, a qual varia com o tempo  $t$ ; *i.e.*,  $x = x(t)$ . Usando a lei de Hooke em conjunto com a segunda lei de Newton,  $F = ma = m \ddot{x}$  ( $\ddot{x} = d^2x/dt^2$ ), obtemos uma equação diferencial para a função horária das posições do sistema massa-mola, cuja solução é

$$x = x_{\max} \text{sen}(\omega t + \varphi_0), \quad (3)$$

onde  $x_{\max}$  e  $\varphi_0$  são constantes e  $\omega = \sqrt{k/m}$ . A Eq. (3) é a equação fundamental do MHS. Observamos desde já que esta é a mesma função que ajusta o conjunto de pontos no gráfico da Fig. 2, o qual representa os tipos de dados obtidos por Galileu em suas observações das quatro maiores luas de Júpiter. De fato, se escrevermos “ $\theta$ ” no lugar de “ $x$ ” na Eq. (3), obtemos exatamente a Eq. (1) da Seção 1. Na Seção 5 entenderemos a razão dessa aparente coincidência estudando o movimento das Luas Galileanas.

O movimento circular uniforme (MCU) é aquele em que uma partícula de massa  $m$  move-se em uma trajetória em forma de circunferência com uma velocidade  $\mathbf{v}$  cuja magnitude é constante no tempo ( $v = \text{constante}$ ). A trajetória tem um centro  $C$  e um raio  $r$  também constante; por isso, a velocidade angular  $\omega = d\varphi/dt$  ( $\varphi$  é o ângulo descrito pela partícula), é uma constante. Integrando essa última equação,

$$\varphi = \omega t. \quad (4)$$

Esta equação será útil mais tarde, na Seção 4, ao estabelecermos a equivalência entre o MCU e o MHS empregando os dados de Galileu. Definimos o período  $T$  como o tempo de uma volta completa ( $2\pi$  radianos) da massa na trajetória circular. Substituindo  $t = T$  e  $\varphi = 2\pi$  na Eq. (4), encontramos

$$\omega = \frac{2\pi}{T}. \quad (5)$$

Esta é a Eq. (2) que aparece na Introdução.

### 3. As observações de Galileu de 1610

Como descreve Galileu na quarta parte de seu *Sidereus Nuncius*,<sup>3</sup> no dia 7 de janeiro de 1610 ele

decide observar Júpiter com seu excelente óculo-astronômico e percebe três estrelas pequenas, mas brilhantes, que chamam sua atenção por estarem alinhadas com o planeta. Ele apresenta a ilustração da Fig. 3.



Figura 3: Primeira observação de Galileu de Júpiter e suas estrelas errantes em 7 de janeiro de 1610. A letra **L** à esquerda do diagrama significa Leste; a letra **O** à direita do esboço, Oeste. No original de Galileu, aparecem *Ori.* no lugar de **L** e *Occ.* em vez de **O**, cf. a Fig. 1.

Com o software *Cartes du Ciel* ou *Skychart*<sup>4</sup> podemos inspecionar o mesmo céu visto por Galileu no começo de 1610. Este programa permite que selecionemos o objeto celeste de interesse, a data e hora na qual queremos observá-lo. É necessário fixar também o local do observatório e, como Galileu era professor da Universidade de Pádua, e publicou seu livro em Veneza, escolhemos o norte da Itália como local de observação, mais especificamente, Pádua. O que se obtém ao buscarmos Júpiter no *Skychart* na data da primeira observação Galileana é o que consta da Fig. 4.

Galileu afirma que sua observação de 7 de janeiro de 1610 foi feita na primeira hora da noite. Decidimos qual era a hora local lembrando que em janeiro, ápice do inverno no hemisfério norte, a noite cai muito cedo. Usando o software *Stellarium*<sup>5</sup> verificamos que às 16h 40min GMT<sup>6</sup> do referido dia já estava suficientemente escuro em Pádua. Nesse dia, vemos que Galileu representou apenas três das quatro maiores luas de Júpiter; comparando a Fig. 3 com a Fig. 4 percebemos o que provavelmente ocorreu: notamos sem dificuldades que Calisto é a estrela errante mais afastada de Júpiter ao leste, e que Ganimedes é aquela posicionada a oeste dele; porém, Io e Europa estavam tão próximas no momento da observação de Galileu que ele interpretou ambas como um único Planeta Mediceano (aquele mais próximo a leste de Júpiter na Fig. 3).<sup>7</sup> Em verdade, o telescópio de Galileu possuía características que justificam essa afirmação.

<sup>3</sup>A primeira parte do livro lida com os detalhes da construção da luneta por Galileu; a segunda parte trata das observações da Lua. Na terceira parte, Galileu registra suas observações das estrelas fixas, muito mais abundantes ao telescópio do que a olho nu, e das constelações.

<sup>4</sup>O software *Cartes du Ciel*, ou *Skychart*, é disponibilizado gratuitamente na internet. Vide, por exemplo o sítio <http://www.ap-i.net/skychart/en/download>.

<sup>5</sup>O software *Stellarium* também é gratuito para download (<http://www.stellarium.org/>).

<sup>6</sup>GMT é a sigla para Greenwich Mean time e indica o Tempo Universal, ou o padrão de tempo baseado na rotação da Terra. É ele que estabelece a diferença de fuso horário. A Itália está no fuso +1, o que significa que a hora local de Galileu é uma hora adiantada em relação ao horário de Greenwich: 16h 40min do dia 07/01/1610 em Greenwich corresponderam a 17h 40min para Galileu. Apenas para referência, a parte centro-leste do Brasil está no fuso -3 (três horas mais cedo do que Greenwich).

<sup>7</sup>Essa interpretação é consistente com o comentário do tradutor que aparece na Ref. [1], nota de rodapé 78, p. 64.

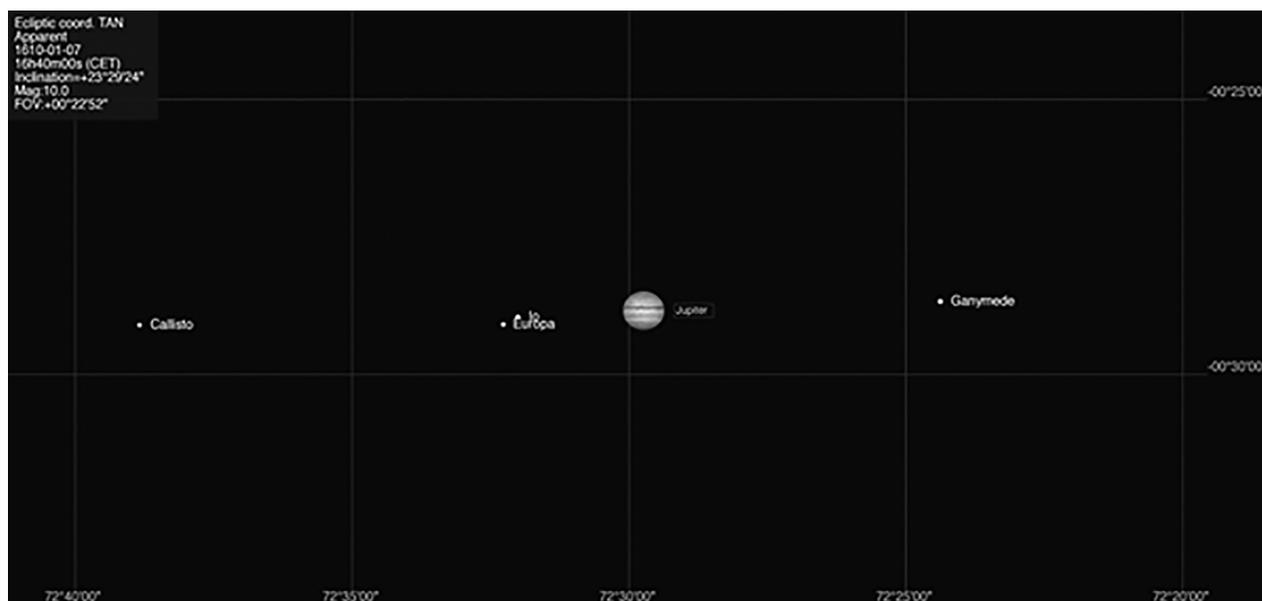


Figura 4: Primeira observação Galileiana de Júpiter e suas luas conforme reproduzido no *Cartes du Ciel*.

Na p. 4 da Ref. [6], aprendemos que a luneta de Galileu era equipada de uma lente objetiva com uma abertura entre 0,5 e 1,0 polegada, o que equivale a um diâmetro  $d$  na faixa de 1,3 a 2,5 cm. Com essa informação podemos calcular o seu poder de *resolução angular*  $\theta_R$ , o qual é limitado pelo fenômeno de difração que ocorre em orifícios ou lentes circulares (Ref. [7], capítulo 36). O critério de Rayleigh para resolução angular estabelece que a separação angular entre duas fontes de luz pontuais (duas luas Galileanas, por exemplo) é tal que o máximo central do padrão de difração<sup>8</sup> de uma das fontes localiza-se sobre o primeiro mínimo do padrão de difração da outra. Com isso é possível empregar a fórmula para a posição angular do primeiro mínimo do padrão de difração de uma abertura circular para calcular  $\theta_R$  como

$$\theta_R = 1,22 \frac{\lambda}{d}, \quad (\text{critério de Rayleigh}) \quad (6)$$

onde  $\lambda$  é o comprimento de onda da radiação que atravessa a lente (luz refletida pelas luas Galileanas) e é captada pelo detector (olho de Galileu). O pico de sensibilidade do olho humano à luz visível ocorre em torno de  $\lambda = 555 \text{ nm}$ , que corresponde a sensação que chamamos de amarelo-esverdeado.<sup>9</sup> Assumindo esse comprimento de onda como aquele percebido por Galileu, podemos estimar a resolução angular de sua luneta como  $\theta_R = 7''$  ao adotarmos o valor intermediário  $d = 2 \text{ cm}$  para o diâmetro da objetiva. Porém, uma resolução dessa ordem só é atingida se não há perturbações ópticas no caminho

do raio de luz (como aquelas que ocorrem por influência da atmosfera terrestre), e se as condições de polimento das lentes do telescópio são ideais. Essas condições seguramente não eram satisfeitas nas observações Galileanas. A separação angular entre Io e Europa na observação das 16h 40min do dia 7 de janeiro de 1610 era de  $16''$  de acordo com o *Skychart*. Considerando a precariedade do instrumento de Galileu, especialmente de suas lentes, torna-se bastante provável que  $\theta_R \approx 20''$ , uma resolução baixa o suficiente para impedir a identificação de Io e Europa como dois objetos distintos.

É apropriado tecermos um comentário um pouco mais detalhado com respeito a determinação da hora das observação Galileanas. Essa não é uma tarefa trivial. Em sua publicação [1], Galileu relata o momento de suas observações em horas, às vezes minutos, depois do pôr-do-sol. Por isso, para sermos absolutamente acurados do ponto de vista histórico, deveríamos calcular o instante do pôr-do-sol em Pádua a cada dia de observação. Esse cálculo pode ser executado de acordo com as instruções de Paul Schlyter constantes na Ref. [8]. Isso foi feito meticulosamente por Ernie Wright na Ref. [9]. Neste trabalho, aproveitamos os resultados de Wright para as horas das observações Galileanas reportadas no *Sidereus Nuncius*. Insistimos, porém, que o método menos preciso de verificar o momento do pôr-do-Sol em Pádua através do *software Stellarium* é suficiente para estabelecer gráficos como os da Fig. 2, como ficará evidente mais adiante.

<sup>8</sup>O padrão de difração de uma abertura ou lente circular é um círculo luminoso central cercado de anéis luminosos concêntricos cada vez menos intensos. (Vide a Ref. [7], Fig. 36-10.)

<sup>9</sup>Vide, por exemplo, a Ref. [7], Fig. 33-2 e comentários na seção 33-2.

Nos dias 8 e 10 de janeiro de 1610, Galileu confirma que as estrelas alinhadas com Júpiter movem-se ao seu redor – descartando a possibilidade de um movimento de Júpiter com respeito às pequenas estrelas – e decide acompanhá-las cuidadosamente, anotando a distâncias relativas entre elas e Júpiter. No dia 11 do mesmo mês, ele apresenta a primeira das medidas de distância de duas das luas com respeito ao planeta, mas o faz em unidades arbitrárias.

É no dia 12 que Galileu dá os primeiros dados de separação angular em segundos de arco; e, neste mesmo dia, ele vê uma das estrelas móveis aparecer ao lado de Júpiter após duas horas de observação. A Fig. 5 mostra uma composição do diagrama apresentado por Galileu (em branco) com a imagem fornecida pelo *Cartes du Ciel*. Galileu anota que a separação entre a estrela mais ao leste e Júpiter é de  $2'$ , mesma distância da estrela mais ao oeste até o planeta. Com o *Cartes du Ciel* é simples obter os dados de separação angular das luas.<sup>10</sup> No horário das 16h 50min de 12 de janeiro de 1610, obtivemos a separação de  $3'34,0''$  entre Júpiter e Ganimedes (a lua mais ao leste); a separação entre Júpiter e Europa foi dada como  $3'29,0''$ , que difere do que foi

dado por Galilei. Essa diferença (relativamente pequena) pode ser atribuída novamente às limitações do telescópio Galileano, muito mais rudimentar que os recursos contemporâneos. Io, a  $58,9''$  de Júpiter, é a estrela errante que Galileu viu surgir ao lado do planeta. A Fig. 5 também sugere que Galileu tenha visto Io e Calisto (a  $1'23,1''$  de Júpiter) como uma única lua, já que a separação angular entre ambas é de  $24''$ , comparável ao poder de resolução de sua luneta.

No dia 13 de janeiro Galilei observa os quatro Planetas Mediceanos pela primeira vez, Fig 6. Ele registra que os três Planetas Mediceanos vistos à direita de Júpiter estão separados entre si e de Júpiter por  $1'$ , enquanto que a lua à esquerda de Júpiter estava  $2'$  distante deste. Pelo *Skychart* percebemos que essa estrela errante à esquerda é Europa, e que sua distância até Júpiter é  $-1'29,2''$  (onde o sinal negativo é nossa convenção para indicar que a lua está ao lado esquerdo de Júpiter). O mesmo *software* indica que as distâncias de Ganimedes, Io e Calisto até Júpiter são  $+1'10,4''$ ,  $+1'42,4''$  e  $+2'26,6''$ , respectivamente (com o sinal positivo para indicar que essas três luas estão a direita de Júpiter).

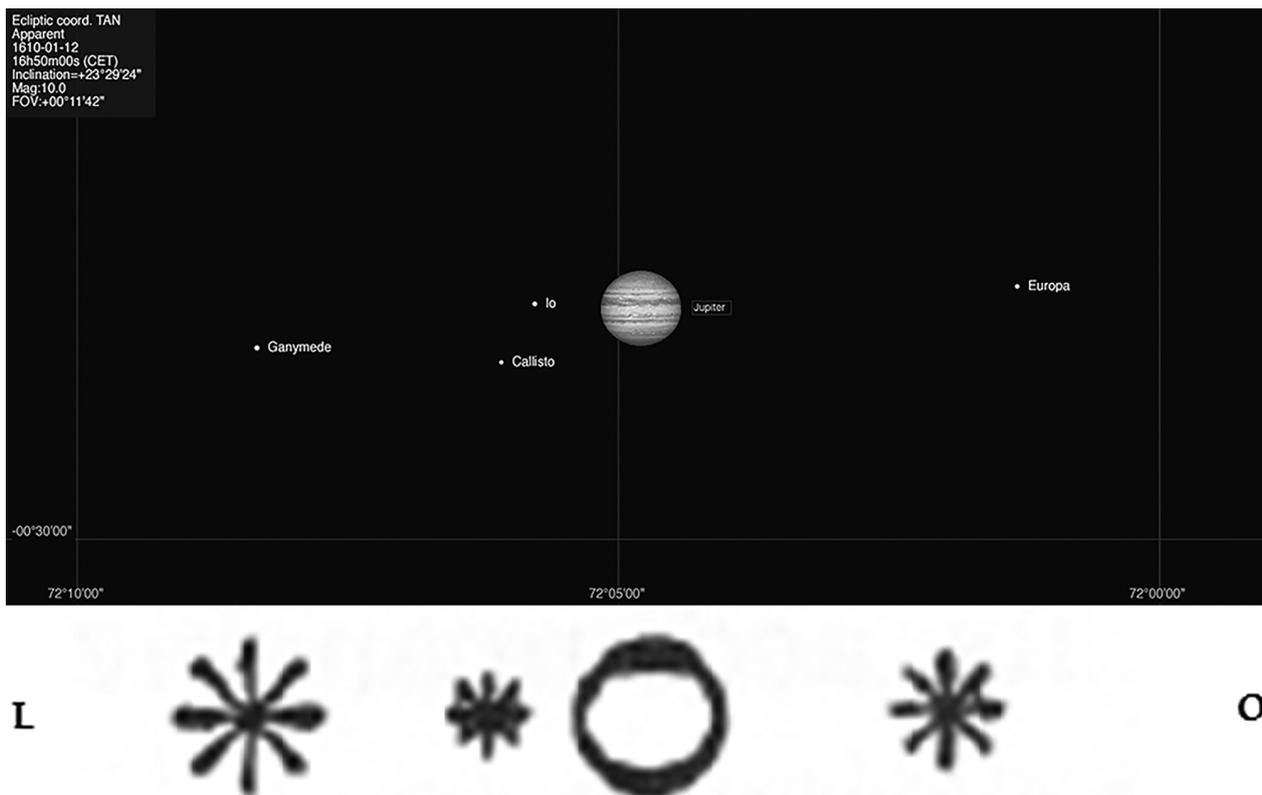


Figura 5: Diagrama de Galilei para a observação do dia 12 de janeiro de 1610 justaposta com a configuração dada pelo *Skychart*. Aparentemente, Galileu percebeu Io e Calisto como uma única estrela.

<sup>10</sup>Ao acessar o programa, estabelece-se o local de observação como Pádua, Itália. Depois, seleciona-se a data e hora de observação. Então, basta encontrar Júpiter com a ferramenta de busca e ancorá-lo (para que não desapareça da tela com a mudança das datas de observação). Por fim, um clique com o botão direito do mouse sob cada uma das luas Galileanas, fornece a separação angular entre elas e Júpiter (dentre outras informações).

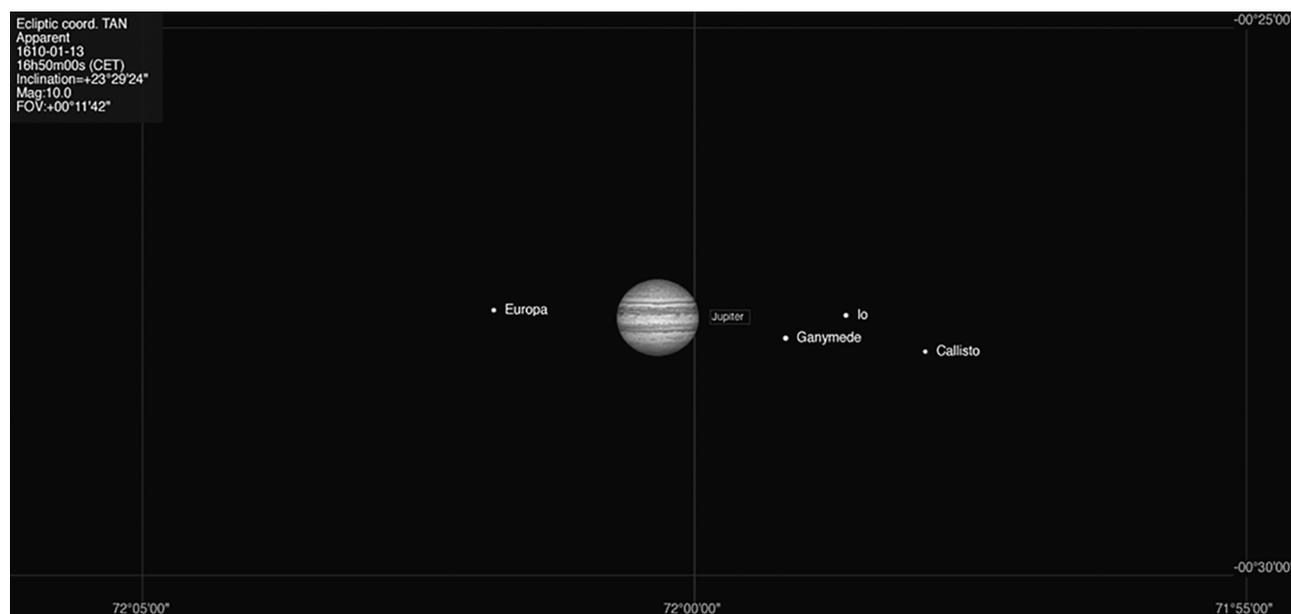


Figura 6: Imagem fornecida pelo Skychart para a observação de Galilei de 13 de janeiro de 1610.

No dia 14 de janeiro de 1610 o céu estava enevado, mas, a partir do dia 15 de janeiro, Galileu passa a tomar os dados de separação das quatro luas até Júpiter em dois horários a cada dia (às vezes três), praticamente todos os dias até 2 de março de 1610. Fizemos o trabalho metódico, extenso e de interesse histórico, de registrar todos os dados de

Galileu reportados no *Sidereus Nuncius*. Esses dados aparecem na Tabela 1 para que fique claro para o leitor quais foram os dados usados para construirmos os gráficos de separação angular  $\theta(^{\circ})$  em função do tempo  $t(\text{dias})$  que aparecem na Introdução e na Seção 5.

Tabela 1: Distância angular  $\theta(t)$  até Júpiter segundo os dados de Galileu em [1]. NO indica “Não Observado”; NM indica “Não Mensurado”; APS indica “Após o por-do-sol”; [\*] dia com céu nublado; sem observações; [\*\*] indica que o dado não foi desenhado por Galileu; [\*\*\*] Galileu apresenta um diagrama adicional com uma estrela fixa  $11'$  a esquerda e sudeste de Calisto.

Tempo de Galileu em “Sidereus Nuncius”			Distância angular até Júpiter			
Data em 1610	Tempo de Galileu	Tempo de Ernie Wright	Io	Europa	Ganimedes	Calisto
Jan 7	1 <sup>a</sup> hora	16h 40min	NO	NM	NM	NM
Jan 8	1 <sup>a</sup> hora	16h 45min	NM	NM	NM	NO
Jan 9	[*]					
Jan 10	1 <sup>a</sup> hora	16h 45min	NO	NM	NM	NM
Jan 11	1 <sup>a</sup> hora	16h 45min	NO	NO	NM	NM
Jan 12	1 <sup>a</sup> hora	16h 50min	NO	+2'	-2'	NO
	3 <sup>a</sup> hora	18h 50min	NM	+2'	-2'	NO
Jan 13	1 <sup>a</sup> hora	16h 50min	+2'	-2'	+1'	+3'
Jan 14	[*]					
Jan 15	3 <sup>a</sup> hora	18h 50min	+2'	-2'	+2'	+10'
	7 <sup>a</sup> hora	22h 50min	NO	+3'	+4'	+8'30"
Jan 16	1 <sup>a</sup> hora	16h 50min	-40"	+40"	+40"	+8'

Tabela 1 (*continuação*): Distância angular  $\theta(t)$  até Júpiter segundo os dados de Galileu em [1].

Tempo de Galileu em "Sidereus Nuncius"		Distância angular até Júpiter				
Data em 1610	Tempo de Galileu	Tempo de Ernie Wright	Io	Europa	Ganimesdes	Calisto
Jan 17	30 min APS	16h 25min	NO	-3'	-3'	+11'
	5 <sup>a</sup> hora	20h 55min	NO	-3'	-3'20"	+11
Jan 18	20 min APS	16h 15min	NO	NO	-8'	+10'
	2 <sup>a</sup> hora	17h 55min	NO	+5'	-6'	+9'
Jan 19	5 <sup>a</sup> hora	20h 55min	NM	+5'	-6'	+9'
	1h 15min	17h 10min	+1'	-1'	NO	+2'
Jan 20	6 <sup>a</sup> hora	21h 55min	+1'	-2'	+40"	+40"
	7 <sup>a</sup> hora	22h 55min	+1'	-2'	+50"	+20"
Jan 21	30 min	16h 30min	-1'40"	-2'30"	+4	-50'
	2 <sup>a</sup> hora	18h 00min	+1'	+1'40"	+7'	-5'
Jan 22	6 <sup>a</sup> hora	22h 00min	+1'20"	+2'40"	+3'60"	-5'
	40 min	16h 40min	-2'40"	+3'20"	+3'20"	-9'40"
Jan 23	5 <sup>a</sup> hora	21h 00min	NO	NO	NO	-9'40"
	1 <sup>a</sup> hora	17h 05min	NO	-2'30"	-2'	-11'30"
Jan 24	6 <sup>a</sup> hora	22h 05min	NO	-3'	-3'	-11'
	1h 40min	17h 45min	NO	NO	-6'	-11'
Jan 25	40 min	16h 45min	NO	+5'	-5'20"	-11'20"
	5 <sup>a</sup> hora	21h 05min	-30"	+5'	-5'20"	-11'20"
Jan 26	1 <sup>a</sup> hora	17h 05min	NO	NO	NO	-7'
Jan 27	[*]					
Jan 28	[*]					
Jan 29	1 <sup>a</sup> hora	17h 10min	-2'30"	+3'	+3'	+4'
	2 <sup>a</sup> hora	18h 10min	NO	-2'50"	-2'20"	+10'
Jan 30	4 <sup>a</sup> hora	20h 10min	NO	-2'40"	-2'20"	+10'
	2 <sup>a</sup> hora	16h 15min	-20"	-20"	-6'	+8'
Jan 31	1 <sup>a</sup> hora	17h 15min	NO	+4'	-6'	+8'
	7 <sup>a</sup> hora	23h 15min	-1'40"	+6'	-5'40"	+14'
Fev 1	7 <sup>a</sup> hora	23h 15min	+2'	-1'30"	NO	+12'
	2 <sup>a</sup> hora	18h 20min	-40"	-3'40"	+4'	+10'
Fev 2	7 <sup>a</sup> hora	23h 20min	-2'	-2'30"	+4'	+7'
	[*]					
Fev 3	1 <sup>a</sup> hora	17h 20min	-2'	+3'	+3'	NO
	1 <sup>a</sup> hora	17h 20min	NO	-2'	-1'	-2'
Fev 4	1 <sup>a</sup> hora	17h 25min	-1'20"	[-1'30"]	-5'20"	-5'40"
	3 <sup>a</sup> hora [**]	20h 25min	[-10"]	[-10"]	-6'	NM
Fev 5	30 min	16h 55min	NO	+4'	-7'	-11'
	1h 30min	17h 55min	NO	NO	-20"	-10'
Fev 6	4 <sup>a</sup> hora [**]	21h 25min	NO	NO	NO	-12'
	1 <sup>a</sup> hora	17h 30min	NO	-4'	+4'	-12'
Fev 7	3 <sup>a</sup> hora	19h 30min	-30"	-4'	+4'	-12'
	5h 30min	22h 00min	-2'	-4'	+4'	-12'
Fev 8	40 min	17h 10min	+1'	-40"	+8'	-10'
	30 min	17h 00min	-2'	+3'30"	+4'	-6'
Jan 14	[*]					
Fev 9	1 <sup>a</sup> hora	17h 35min	-50"	-70"	-2'70"	NO
	5 <sup>a</sup> hora	21h 35min	NO	-30"	-4'	NO
Fev 10	6 <sup>a</sup> hora	22h 35min	NO	-30"	-4'	+2'
	6 <sup>a</sup> hora	22h 35min	NO	+5'	-7'	+8'
Fev 11	1 <sup>a</sup> hora	17h 35min	NO	NO	-3'	+10'
	6 <sup>a</sup> hora [**]	22h 35min	NO	NO	-50"	+12'
Fev 12	1 <sup>a</sup> hora	17h 40min	NO	-3'	+2'	+10'
	2 <sup>a</sup> hora [**]	18h 40min	NO	-3'	+3'	+10'
Fev 13	6 <sup>a</sup> hora	22h 40min	-1'50"	-4'50"	+3'	+10'

Tabela 1 (*continuação*): Distância angular  $\theta(t)$  até Júpiter segundo os dados de Galileu em [1].

Tempo de Galileu em “Sidereus Nuncius”			Distância angular até Júpiter			
Data em 1610	Tempo de Galileu	Tempo de Ernie Wright	Io	Europa	Ganimedes	Calisto
Fev 19	40 min	17h 35min 21h 00min	NO	NO	+7'	+13'
Fev 20	[*]					
Fev 21	1h 30min	18h 15min	+3'	-2'	NO	+10'
Fev 22	[*]					
Fev 23	[*]					
Fev 24	[*]					
Fev 25	1h 30min	18h 20min	+3'	-4'	+2'	-8'
Fev 26	30 min 5 <sup>a</sup> hora	17h 20min 21h 50min	+1' NO	NO NO	+6' +6'	-10' -11'
Fev 27	1h 40min 5 <sup>a</sup> hora	19h 30min 23h 50min	-30'' -1'	+2'30'' NM	+3'30'' NM	-10'' NM
Fev 28	1 <sup>a</sup> hora 5 <sup>a</sup> hora [***]	17h 50min 21h 50min	+2' +2'	NO -2'	NO NO	-9'' -9''
Mar 1	40 min	17h 35min	-2'	-3'	-3'20''	-7'20''
Mar 2	40 min	17h 35min	+2'	+2'	-7'	-6'30''

Durante esses dias de observação de Júpiter, de 7 de janeiro a 2 de março de 1610, Galileu faz 64 diagramas<sup>11</sup> de Júpiter e suas quatro maiores luas, fornece dados acurados para a posição desses objetos celestes e, apenas uma única vez, em 12 de fevereiro, esboça uma lua que não estava lá. A natureza colossal desse trabalho fica evidente quando lembramos as condições e a época em que foi feito. Aparte a questão técnica, há também as conclusões bombásticas para a astronomia e física: golpe ao geocentrismo e caracterização do movimento circular uniforme, que veremos nas próximas seções.

#### 4. Interpretação dos dados de Galilei: equivalência entre MHS e MCU

Voltemos à pergunta que encerrou a seção introdutória: Como explicar as observações que descrevemos na seção anterior? Galileu apontou a resposta: Calisto tinha de orbitar Júpiter em uma trajetória circular a uma distância fixa igual a  $\theta_{\max}$  e velocidade angular constante  $\omega = 2\pi/T$ . Nas palavras de Galileu (Ref. [1], p. 84):

Acima de tudo, uma vez que eles [os Planetas Mediceanos] algumas vezes seguem e outras vezes precedem Júpiter pelos mesmos intervalos, e que eles permanecem dentro de distâncias bastante limitadas seja a leste ou a oeste de Júpiter, acompanhando esse planeta em ambos os seus movimentos direto e retrógrado

de forma constante, ninguém pode duvidar que eles completam suas revoluções ao redor de Júpiter e, ao mesmo tempo, efetuam todos juntos um período de doze anos ao redor do centro do universo.<sup>12</sup> Que eles também se movem em círculos desiguais, é deduzido manifestamente do fato que nunca é possível ver dois desses planetas em conjunção à maior elongação de Júpiter, enquanto que, na vizinhança de Júpiter, são encontrados reunidos dois, três e as vezes os quatro deles.

Mas essa é uma declaração muito forte porque estabelece o movimento dos Planetas Mediceanos como o movimento circular uniforme. Daí, segue que o MCU e o MHS são equivalentes, conforme argumentamos abaixo.

De fato, seja  $\varphi$  o ângulo descrito por Calisto (ponto  $C$  da Fig. 7) com respeito ao plano de observação (que contém o eixo  $x$  e o eixo  $z$  saindo perpendicularmente do papel). Como  $C$ , de acordo com a hipótese de Galileu, realiza um *movimento circular* uniforme, então vale a Eq. (4)

$$\varphi = \omega t . \quad (7)$$

(Esta equação é recorrente no estudo de movimentos de rotação.)

<sup>11</sup>Na verdade, o número de esboços de Galileu é 65 se contarmos um diagrama do dia 26 de fevereiro de 1610 em que ele repete o resultado da observação da quinta hora depois do pôr-do-sol para adicionar uma estrela fixa observada a 11' à esquerda da estrela mais a leste de Júpiter, e um pouco para o sul.

<sup>12</sup>Para Galileu, o centro do universo é o Sol, e não a Terra, como queriam os geocentristas.

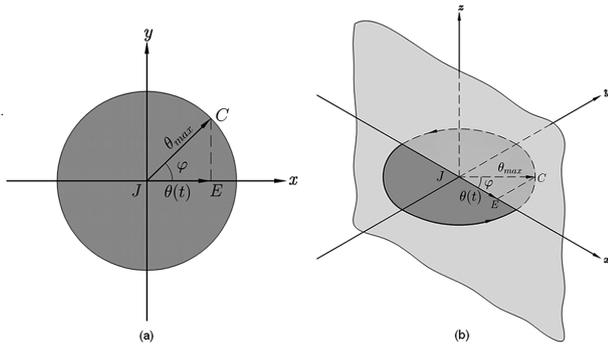


Figura 7: Órbita circular uniforme de Calisto  $C$  em torno de Júpiter  $J$ . A projeção da posição de  $C$  no plano celeste (plano perpendicular à página passando) pelo eixo  $x$  dá a localização de  $E$ , a “estrela móvel” de Galilei.

A projeção de  $\theta_{\max}$  no eixo  $x$  (ou seja, no plano celeste) é, conforme a Fig. 4

$$\theta(t) = \theta_{\max} \cos \varphi . \tag{8}$$

A função cosseno equivale à função seno a menos de uma fase constante  $\varphi_0 = \pi/2$ . De fato, usando a regra do seno da soma,

$$\text{sen} \left( \varphi + \frac{\pi}{2} \right) = \text{sen} \varphi \cos \frac{\pi}{2} + \text{sen} \frac{\pi}{2} \cos \varphi = \cos \varphi ,$$

i.e.

$$\cos \varphi = \text{sen} (\varphi + \varphi_0) , \quad (\varphi_0 = \pi/2) . \tag{9}$$

Substituindo as Eqs. (7) e (9) na Eq. (8),

$$\theta(t) = \theta_{\max} \text{sen} (\omega t + \varphi_0) , \tag{10}$$

que é a equação do movimento harmônico simples, Eq. (1) ou Eq. (3), com a renomeação de  $x$  para  $\theta$ .

Ou seja, *partindo da hipótese de movimento circular à velocidade angular constante, chegamos ao movimento harmônico simples por uma projeção ao longo do círculo*. A conclusão última é:

O movimento harmônico da lua de Júpiter é sua órbita circular vista de perfil.

Vemos agora porque a descoberta de Galileu é tão revolucionária. Se existem corpos celestes (como Calisto, Ganimedes, Europa e Io) que orbitam outros planetas (como Júpiter), então, talvez a própria Terra orbite outro corpo celeste (o Sol). Isso retira a Terra da posição de centro do universo.

Essa idéia era rejeitada pela Igreja e sua reação foi trancar Galileu em prisão domiciliar perpétua.

<sup>13</sup>Vide último parágrafo da p. 83 da Ref. [1].

<sup>14</sup>Os cálculos mostrarão os valores dos raios das órbitas das quatro Luas Galileanas. Não é necessário assumir nenhum conhecimento prévio quanto a isso.

## 5. Os Planetas Mediceanos e seus períodos

O parágrafo de *Sidereus Nuncius* em que Galileu afirma que o movimento das estrelas errantes tem a forma de circunferências começa assim:<sup>13</sup>

Eis as observações acerca dos quatro planetas Mediceanos recentemente descobertos primeiramente por mim, e, embora os seus períodos ainda não tenham sido reconstruídos de forma numérica por esses dados, é legítimo evidenciar alguns comentários dignos de nota.

Nesta seção, queremos justamente complementar o quadro composto por Galileu e determinar os períodos das Luas Galileanas. Usaremos os dados que ele mesmo coletou com seu óculo-astronômico.

Começaremos arbitrariamente pelo Planeta Mediceano mais externo, Calisto; estudando, na seqüência, as Luas Galileanas de órbitas com raios progressivamente menores que o da de Calisto: Ganimedes, Europa e Io.<sup>14</sup>

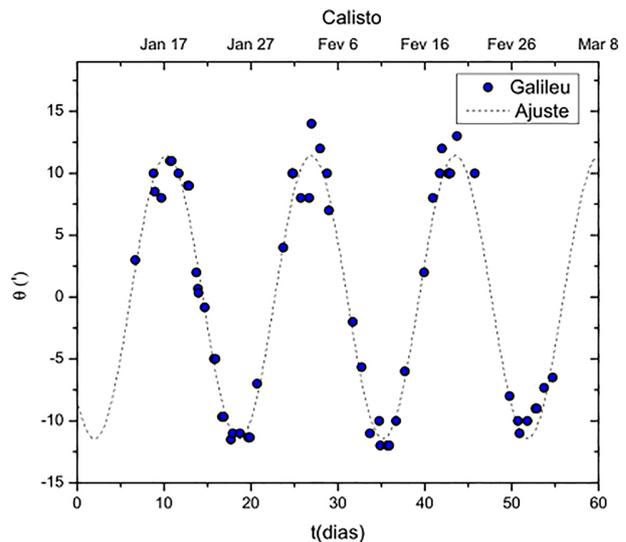


Figura 8: Separação angular  $\theta$  (em minutos de arco) de Calisto até Júpiter em função do tempo  $t$  (em dias). Os dados em forma de círculo correspondem às observações Galileanas. A curva senoidal tracejada foi ajustada com o *software Origin* ao conjunto de dados Galileanos.

A Fig. 8 mostra a distribuição dos dados Galileanos de separação angular  $\theta$  em função do tempo  $t$  para a estrela errante que era vista com maior elongação com respeito a Júpiter: Calisto. O conjunto completo desses dados está disposto na Tabela 1 da Seção 3..

Conforme discutimos na Seção 1, a distribuição tem cristas e vales como uma função seno, que aparece na Eq. (10),

$$\theta(t) = \theta_{\max} \text{sen}(\omega t + \varphi_0) .$$

É possível usar um *software* adequado para a construção de gráficos de funções, como o *Origin*, para ajustar uma curva senoidal ao conjunto de pontos. Esses *softwares* de ajuste funcionam usando valores iniciais dos parâmetros da função a ser ajustada para realizar iterações sucessivas em que novos valores ótimos dos parâmetros são dados. Estes valores ótimos dos parâmetros maximizam a coincidência da função ajustada aos pontos do gráfico, pois minimizam o  $\chi^2$  do ajuste.<sup>15</sup> Os parâmetros da função (10) são a terna  $(\theta_{\max}, \omega, \varphi_0)$ .

A amplitude  $\theta_{\max}$  é facilmente visualizada do gráfico da Fig. 8 como a distância vertical desde o zero do eixo das ordenadas até o pico superior à esquerda do gráfico, por exemplo. Podemos usar:  $\theta_{\max} = 10'$ .

De acordo com a Eq. (5),

$$\omega = \frac{2\pi}{T} . \quad (11)$$

Logo, encontraremos a estimativa inicial da frequência angular  $\omega$  da órbita de Calisto, se tivermos um “chute instruído” para o valor do período  $T$  da órbita. Mas isso é obtido diretamente da Fig. 8 como a distância no eixo horizontal entre dois vales consecutivos; essa é a definição de período em uma curva senóide: o intervalo temporal correspondente a separação entre dois picos ou, equivalentemente, entre dois vales. Portanto, o gráfico de Calisto dá:  $T = (35 - 18)$  dias = 17 dias; o que resulta em  $\omega = 0,37$  (dias)<sup>-1</sup>.

O valor estimado para o parâmetro  $\varphi_0$  deve ser calculado a partir da Eq. (10) e dos valores adotados anteriormente para  $\theta_{\max}$  e  $\omega$ . De fato, vamos tomar um valor qualquer de tempo  $t = t_0$  correspondente ao ponto  $\theta_0 = \theta(t_0)$  no conjunto de dados  $\theta \times t$  de Calisto, *e.g.*  $t_0 = 9,7$  dias (primeira hora de observação do dia 16 de Janeiro de 1610) e  $\theta_0 = +8'$ . Começamos substituindo  $t = t_0$  e  $\theta(t_0) = \theta_0$  na Eq. (10)

$$\theta_0 = \theta_{\max} \text{sen}(\omega t_0 + \varphi_0) . \quad (12)$$

<sup>15</sup>Indicamos a Ref. [4] para os leitores interessados em aprender sobre o ajuste de funções contínuas a um conjunto de pontos, e estudar sobre os testes de qualidade de ajuste (incluindo o de  $\chi^2$  e  $\chi^2_{red}$ ).

<sup>16</sup>Suponha que uma grandeza  $f = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , seja calculada a partir da quantidades  $x_1, x_2, \dots, x_n$  que são medidas diretamente e possuem incertezas  $\sigma_{x_1}, \sigma_{x_2}, \dots, \sigma_{x_n}$ . Então, a incerteza  $\sigma_f$  na quantidade  $f$  é encontrada fazendo

$$\sigma_f^2 = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1} \sigma_{x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial x_2} \sigma_{x_2} \right)^2 + \dots + \left( \frac{\partial f}{\partial x_n} \sigma_{x_n} \right)^2 .$$

Novamente indicamos a Ref. [4].

Agora, invertemos essa equação para isolar o parâmetro  $\varphi_0$  em termos das outras quantidades

$$\text{sen}(\omega t_0 + \varphi_0) = \frac{\theta_0}{\theta_{\max}} \implies \omega t_0 + \varphi_0 = \arcsen\left(\frac{\theta_0}{\theta_{\max}}\right) ,$$

*i.e.*

$$\varphi_0 = \arcsen\left(\frac{\theta_0}{\theta_{\max}}\right) - \omega t_0 . \quad (13)$$

Dessa forma, para um certo ponto  $(t_0, \theta_0)$  da tabela de dados de separação angular de Calisto com o tempo, calculamos  $\varphi_0$  a partir das estimativas anteriores para  $\theta_{\max}$  e  $\omega$  substituindo todos esses valores na Eq. (13). Com  $(t_0, \theta_0) = (9,7 \text{ dias}, 8')$ ,  $\theta_{\max} = 10'$  e  $\omega = 0,37$  (dias)<sup>-1</sup> encontramos:  $\varphi_0 = -2,7$  rad.

Alimentando o *software* de análise gráfica com a terna  $(\theta_{\max}, \omega, \varphi_0) = (10', 0,37 \text{ (dias)}^{-1}, -2,7 \text{ rad})$  obtemos a curva senoidal ajustada sobreposta aos pontos galileanos da Fig. 8.

Em nosso trabalho, as estimativas preliminares de  $(\theta_{\max}, \omega, \varphi_0)$  foram inseridas na opção “Non-Linear Curve Fitting: Fitting Section” do programa *Origin*. O *Origin* dá, então, os valores ajustados

$$(\theta_{\max}, \omega, \varphi_0) = ((11,5 \pm 0,2)', (0,379 \pm 0,002) \text{ (dias)}^{-1}, (-2,33 \pm 0,06) \text{ rad}) \quad (14)$$

que minimizam o  $\chi^2$ .

Tabela 2: Parâmetros  $(\theta_{\max}, \omega, \varphi_0)$  para Calisto conforme estimados da distribuição dos dados Galileanos. São incluídos também os valores ótimos dos parâmetros  $(\theta_{\max}, \omega, \varphi_0)$  fornecidos pelo ajuste do *software Origin*, bem como os erros associados aos parâmetros ajustados.

Calisto			
Parâmetro de ajuste	Estimativa	Ajuste	Erro
$\theta_{\max} (')$	10	11,5	0,2
$\omega$ (1/dias)	0,37	0,379	0,002
$\varphi_0$ (rad)	-2,7	-2,33	0,06

A Tabela 2 exhibe os valores dos parâmetros  $(\theta_{\max}, \omega, \varphi_0)$  e também as incertezas nesses parâmetros ajustados de acordo com a teoria de erros. Essas incertezas são fornecidas pelo próprio

*software* de ajuste (e estão de acordo com a teoria da Ref. [4]). Em particular, vemos a incerteza  $\sigma_\omega = 0,002$  (dias)<sup>-1</sup> da frequência angular  $\omega = 0,379$  (dias)<sup>-1</sup>. Com este valor ótimo ajustado de  $\omega$  recalculamos o melhor valor para o período  $T$  usando a Eq. (11):  $T = 16,60$  dias. O erro  $\sigma_\omega$  pode ser usado para encontrarmos a incerteza do período orbital  $T$  de Calisto. Chamaremos esta incerteza de  $\sigma_T$ . A regra de propagação de incertezas<sup>16</sup> dá, para  $T = 2\pi/\omega$ ,

$$\sigma_T = \sqrt{\left(\frac{dT}{d\omega}\sigma_\omega\right)^2} = \left|-\frac{2\pi}{\omega^2}\sigma_\omega\right| = \frac{2\pi}{\omega^2}\sigma_\omega. \quad (15)$$

Portanto, obtemos  $\sigma_T = 0,08$  dias. Logo, o período orbital de Calisto em torno de Júpiter (em dias terrestres) é, de acordo com os dados Galileanos

$$T = (16,60 \pm 0,08) \text{ dias}. \quad (16)$$

Caso o ajuste tivesse sido feito sobre os dados para Calisto fornecidos pelo *Skychart*, teríamos obtido

$$T_{\text{Skychart}} = (16,67 \pm 0,01) \text{ dias}, \quad (17)$$

em total compatibilidade ao resultado encontrado com os dados reportados por Galilei no *Sidereus Nuncius*. Notoriamente, o resultado (17) apresenta uma incerteza menor que a Eq. (16).<sup>17</sup>

O valor tabelado (vide, *e.g.* a Ref. [5]) é de

$$T_{\text{tab}} = 16,689 \text{ dias}, \quad (18)$$

que coincide com o resultado (16), que vem dos dados Galileanos, dentro do intervalo de confiança de 95,45% (dois sigmas  $\sigma_T$  para mais ou para menos).

A excelente concordância do valor de  $T$  obtido de nossos dados pelo ajuste da função senóide com o valor tabelado afirma a natureza circular do movimento orbital de Calisto. De fato, a excentricidade<sup>18</sup> da órbita de Calisto é extremamente baixa [5]: vale 0,007.

Como exemplo de aplicação para esse nosso cálculo de  $T$ , vamos encontrar o raio  $r$  da órbita de Calisto em torno de Júpiter. Para isso precisamos usar a *Terceira Lei de Kepler*:

O quadrado do período orbital de um corpo celeste é proporcional ao cubo do raio de sua órbita.

A versão quantitativa dessa afirmação é a seguinte equação para o período orbital  $T$

$$T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM}\right)r^3, \quad (19)$$

sendo  $G = 6,673 \times 10^{-11}$  N m<sup>2</sup> / kg<sup>2</sup> a constante universal da gravitação;  $M$  é a massa do corpo central e  $r$  é o raio da órbita do objeto de interesse.

A Eq. (19) pode ser facilmente encontrada combinando a segunda lei de Newton da dinâmica ( $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ , com  $a = \omega^2 r$  o módulo da aceleração centrípeta) [3] e a lei de Newton da gravitação universal ( $\mathbf{F} = -\frac{GMm}{r^2}\hat{r}$ , onde  $m$  é a massa do corpo menor). Indicamos aqui a leitura da seção 13-7 da Ref. [2].

Se soubermos a massa de Júpiter [5],

$$M = 1,90 \times 10^{27} \text{ kg}, \quad (20)$$

podemos usar o valor do período de Calisto, Eq. (16), para calcular o raio  $r$  de sua órbita através da Eq. (19). De fato, desta equação temos

$$r = \left(\frac{GMT^2}{4\pi^2}\right)^{1/3}, \quad (21)$$

dando

$$r = (1876 \pm 6) \times 10^3 \text{ km}, \quad (22)$$

onde usamos

$$\sigma_r = \frac{dr}{dT}\sigma_T = \frac{1}{3} \left(\frac{GMT^2}{4\pi^2}\right)^{-2/3} \left(\frac{2GMT}{4\pi^2}\right)\sigma_T = \frac{2}{3} \left(\frac{GMT^2}{4\pi^2}\right)^{1/3} \frac{1}{T}\sigma_T = \frac{2}{3} \frac{r}{T}\sigma_T. \quad (23)$$

que é a expressão para a propagação da incerteza da variável  $T$  para a variável dependente  $r$ . Note que o raio da órbita de Calisto que obtivemos na Eq. (22) é compatível com aquele fornecido pela literatura [5],

$$r_{\text{tab}} = 1883 \times 10^3 \text{ km}. \quad (24)$$

Ou seja, a distância Calisto-Júpiter é maior do que cerca de 5 vezes a distância Terra-Lua (que é  $384,4 \times 10^3$  km).

Repetiremos o mesmo roteiro de estudo que fizemos para Calisto a seguir, quando analisaremos as características orbitais das outras Luas Galileanas.

Os dados da Tabela 1 para Ganimedes permitem construir o gráfico de  $\theta$  por  $t$  da Fig. 9.

<sup>17</sup>Isso pode ser explicado pelo fato de o *Skychart* fornecer um conjunto muito maior de pontos (melhor estatística para o ajuste). Mais importante que isso, o *Skychart*, como efemérides eletrônica, provavelmente usa teoria (equações de mecânica celeste) para fornecer seus dados. Fazer o ajuste da curva senóide ao conjunto de pontos do *Skychart* significaria, então, comparar teoria a teoria, e não observações (dados de Galilei) a teoria (ajuste da senóide) – opção esta que é certamente mais significativa.

<sup>18</sup>Excentricidade de uma órbita é a medida de o quanto ela se desvia do formato de uma circunferência. Quanto maior a excentricidade, mais pronunciado é o caráter elíptico da trajetória do corpo celeste.

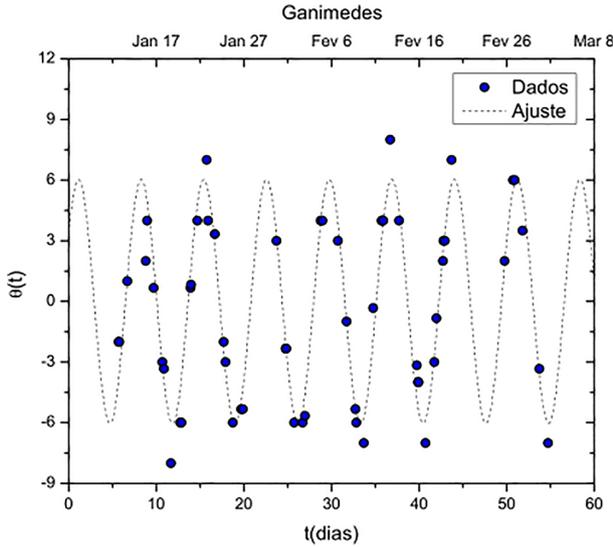


Figura 9: Distribuição dos dados de separação angular  $\theta$  ( $^{\circ}$ ) de Ganimedes com respeito a Júpiter em função do tempo  $t$  (dias).

Podemos ajustar uma curva senoidal ao conjunto dos pontos no gráfico da Fig. 9 estimando (i) a altura do primeiro pico do conjunto de dados de Galileu,  $\theta_{\max} = 6'$ ; (ii) o valor do período usando os primeiros vales:  $T_{\text{estimado}} = (26 - 19)$  dias = 7 dias, e o valor preliminar de  $\omega = 2\pi/T$  que aparece na coluna “Estimativa” da Tabela 3; (iii) o valor de  $\varphi_0$  a partir do  $\omega$  preliminar e dos pontos  $t_0 = 5,7$  dias;  $\theta_0 = -2'$  da Tabela 1 (correspondente à observação de 12 de janeiro de 1610, às 16 h 50 min). Alimentando o *software Origin* com os valores estimados da Tabela 3, obtemos a curva tracejada da Fig. 9 e os valores ótimos dos parâmetros ( $\theta_{\max}, \omega, \varphi_0$ ) da curva senoidal.

Tabela 3: Parâmetros ( $\theta_{\max}, \omega, \varphi_0$ ) para Ganimedes conforme estimados da distribuição dos dados  $t \times \theta$  e obtidos a partir do ajuste da curva senoidal. Os parâmetros orbitais ( $T, r$ ) calculados a partir do ajuste senoidal são confrontados com os dados fornecidos tabelados.

Ganimedes		
Parâmetro de ajuste	Estimativa	Ajuste
$\theta_{\max}$ ( $^{\circ}$ )	6	$(6,0 \pm 0,2)$
$\omega$ (1/dias)	0,9	$(0,878 \pm 0,003)$
$\varphi_0$ (rad)	-5,5	$(-5,69 \pm 0,08)$
Parâmetro orbital	Calculado	Tabelado
$T$ (dias)	$(7,16 \pm 0,02)$	7,155
$r$ ( $\times 10^3$ km)	$(1071 \pm 2)$	1070

<sup>19</sup>O semieixo maior de uma órbita elíptica é a distância desde o centro da elipse, pelo eixo que passa pelos pontos focais, até a sua borda. O semi-eixo maior reduz-se ao raio da órbita quando a elipse degenera em uma circunferência, o que acontece quando a excentricidade tende a zero.

Com os dados da coluna “Ajuste” e as Eqs. (11) e (15), obtemos o valor do período orbital de Ganimedes  $T = (7,16 \pm 0,02)$  dias da Tabela 3, o qual concorda com o valor  $T_{\text{tab}} = 7,155$  dias disponível na literatura [5] no intervalo de confiança de  $\sigma_T$ , o que é bastante satisfatório. Substituindo o valor calculado de  $T$  para Ganimedes nas relações (21) para  $r$  e (23) para  $\sigma_r$ , encontramos o raio de sua órbita com respeito a Júpiter:  $r = (1071 \pm 2) \times 10^3$  km, ao passo que o valor da literatura [5] para o semieixo maior<sup>19</sup> da órbita de Ganimedes é  $r_{\text{tab}} = 1070 \times 10^3$  km. A excelente concordância de  $r$  e  $r_{\text{tab}}$  – que coincidem no intervalo de apenas um  $\sigma_r$  – pode ser atribuída ao fato da excentricidade da órbita de Ganimedes ser muito pequena 0,002. Note que a distância Ganimedes-Júpiter é cerca de 3 vezes a distância Terra-Lua.

O gráfico da Fig. 10 mostra os dados coletados por Galileu para Europa durante todo o período de observação reportado no *Sidereus Nuncius*. A distribuição de pontos não é tão regular como nos casos de Calisto e Ganimedes, nem é tão evidentemente senoidal. O comportamento periódico ficaria claro, entretanto, caso o número de pontos (nesse mesmo intervalo de tempo) fosse maior: então, veríamos o gráfico da Fig. 10 populado de pontos sobre o ajuste senoidal (pontilhado). Isso teria sido obtido caso Galileu tivesse realizado um número maior de observações em uma mesma noite. Convidamos o leitor a usar o *software Skychart* para simular o conjunto adicional de pontos que se sobrepõe a curva senoidal da função  $\theta(t)$  de Europa.

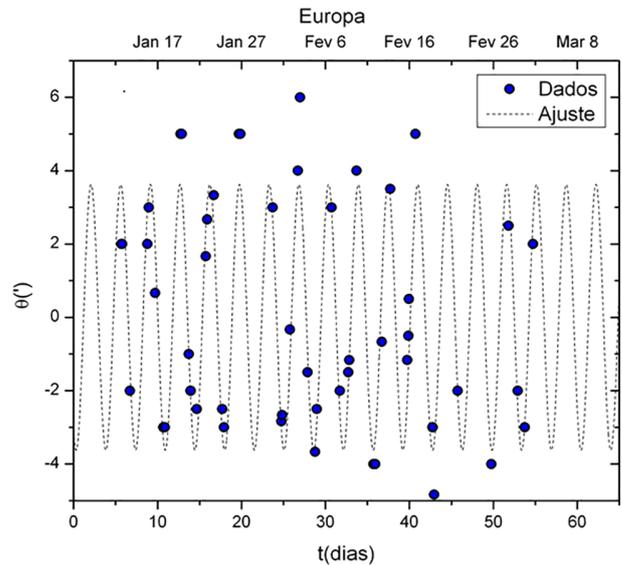


Figura 10: Conjunto dos dados de separação angular  $\theta(t)$  de Europa até Júpiter.

A Tabela 4 mostra os valores da terna  $(\theta_{\max}, \omega, \varphi_0)$  estimados para Europa a partir da distribuição dos pontos Galileanos na Fig. 10. A estimativa para  $\theta_{\max}$  foi guiada pelo número de pontos na parte de baixo do gráfico: há mais pontos na região em que  $\theta$  é da ordem de  $-3'$ . Para a estimativa do período  $T$  usamos os dados do dia 17 e 21 de janeiro de 1610 — cf. Tabela 1 e Fig. 10. Alimentando o *Origin* com os valores estimados, obtivemos os valores ótimos para  $(\theta_{\max}, \omega, \varphi_0)$  mostrados na coluna “Ajuste” da Tabela 4.

Tabela 4: Parâmetros  $(\theta_{\max}, \omega, \varphi_0)$  para Europa estimados da distribuição dos dados Galileanos e fornecidos pelo ajuste senoidal. Dos parâmetros ajustados resultam o período orbital  $T$  e o raio da órbita  $r$ , que aparecem na tabela ao lado dos valores fornecidos pela literatura.

Europa		
Parâmetro de ajuste	Estimativa	Ajuste
$\theta_{\max} (')$	3,5	$(3,6 \pm 0,2)$
$\omega$ (1/dias)	1,8	$(1,776 \pm 0,005)$
$\varphi_0$ (rad)	-2	$(-2,1 \pm 0,1)$
Parâmetro orbital	Calculado	Tabelado
$T$ (dias)	$(3,537 \pm 0,009)$	3,551
$r$ ( $\times 10^3$ km)	$(669 \pm 1)$	671

Realizando os mesmos cálculos descritos em detalhe para os casos de Ganimedes e, sobretudo, Calisto, encontramos os parâmetros orbitais de Europa exibidos na parte inferior da Tabela 4. Embora a excentricidade da órbita de Europa — igual a 0,009 — seja a maior das Luas Galileanas, ela é ainda pequena o suficiente para que o valor de  $r = (669 \pm 1) \times 10^3$  km por nós encontrado coincida, no intervalo de  $2\sigma_r$ , com o valor do semieixo maior da órbita desta lua, que é:  $671 \times 10^3$  km. Essa distância é cerca de duas vezes a distância Terra-Lua.

O conjunto completo dos dados de Galileu para a separação angular de Io até Júpiter, elencados na Tabela 1, formam a distribuição de pontos exibida na Fig. 11. Aqui a dificuldade de reconhecer um padrão senoidal é ainda maior que no caso de Europa. Todavia, da nossa experiência com as demais Luas Galileanas, sabemos ser coerente tentar um ajuste de uma função periódica aos pontos.<sup>20</sup>

Os dois primeiros pontos da Fig. 11 permitem as estimativas de  $\theta_{\max}$  e  $T$  (i.e.,  $\omega$ ) que aparecem na Tabela 5. Esses valores estimados levam aos valores ótimos da terna  $(\theta_{\max}, \omega, \varphi_0)$  obtidos pelo ajuste senoidal, de acordo com o roteiro estabelecido anteriormente.

<sup>20</sup>Os pontos  $t \times \theta$  formariam um evidente padrão de função senoidal se existissem em maior número, mas os dados Galileanos estão limitados aos da Tabela 1.

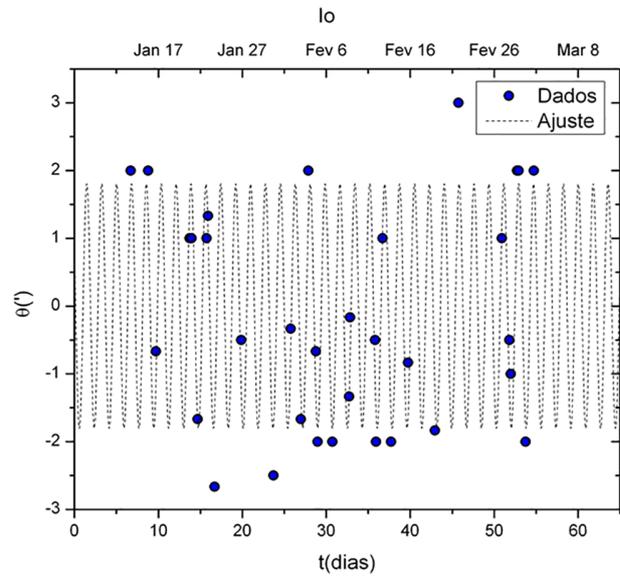


Figura 11: Separação angular  $\theta$  ( $'$ ) de Io até Júpiter para os valores de  $t$  (dias) de todas as observação de Galileu.

Tabela 5: Parâmetros  $(\theta_{\max}, \omega, \varphi_0)$  e  $(T, r)$ .

Io		
Parâmetro de ajuste	Estimativa	Ajuste
$\theta_{\max} (')$	2	$(1,8 \pm 0,2)$
$\omega$ (1/dias)	3,5	$(3,544 \pm 0,007)$
$\varphi_0$ (rad)	-3,5	$(-3,7 \pm 0,2)$
Parâmetro orbital	Calculado	Tabelado
$T$ (dias)	$(1,773 \pm 0,004)$	1,769
$r$ ( $\times 10^3$ km)	$(422,4 \pm 0,6)$	422

A Tabela 5 também mostra os parâmetros orbitais  $(T, r)$  que calculamos para Io. O raio orbital de Io obtido a partir de nossos cálculos também é coerente com o da literatura, um fato esperado já que a excentricidade de Io é de apenas 0,004. A distância Io-Júpiter é aproximadamente a mesma que a distância Terra-Lua.

## 6. Conclusão

Neste longo trabalho, resumimos as características e equações do movimento harmônico simples (MHS) e do movimento circular uniforme (MCU). Depois vimos como as observações de Galileu das posições angulares das quatro maiores luas de Júpiter poderiam estar relacionadas a esses tipos de movimentos: as estrelas móveis erravam de um lado a outro de Júpiter na abóboda celeste da mesma forma que a massa viaja à esquerda e à direita do

ponto de equilíbrio em um sistema massa-mola. Não obstante, Galileu afirmou que os Planetas Mediceanos realizavam um movimento circular uniforme (MCU), descreviam órbitas em formas de círculos (p. 84 da Ref. [1]):

Observa-se também que as revoluções [dos Planetas Mediceanos] são mais rápidas para aqueles planetas que descrevem círculos menores ao redor de Júpiter, uma vez que as estrelas mais próximas de Júpiter são vistas frequentemente à leste quando no dia anterior eles apareceram ao oeste, e vise-versa, ao passo que o planeta que traça a maior órbita, sob observação acurada de seu ponto de retorno, parece ter um período de meio mês.

A conclusão é que esses movimentos são equivalentes: o MHS observado na abóboda celeste é a projeção do MCU das estrelas errantes. Note como a frase de Galileu citada acima prevê que tanto maior é o período de uma estrela errante quanto maior for o raio de sua órbita circular. Os cálculos da Seção 5, resumidos na Tabela 6, confirmam justamente essa afirmação.

Os resultados para  $T$  e  $r$  da Tabela 6 não poderiam ser obtidos sem o ajuste senoidal feito para o conjunto de dados de separação angular  $\theta(t)$  de cada Lua Galileana com relação a Júpiter. Para obter esses dados, foi necessário construir a Tabela 1, um conjunto completo dos dados vindos das observações de Galileu de 1610 reportadas no seu livro *Sidereus Nuncius* [1]. Tivemos, portanto, o trabalho de realizar uma leitura meticulosa dessa obra e efetuar o serviço de anotar cada dado de separação angular, para cada uma das luas, no dia e hora especificados por Galileu. Um trabalho todo especial

foi dedicado a determinar a hora universal da observação, já que Galileu apenas informa a hora de observação a partir do pôr-do-sol. Tudo isso, dá um caráter histórico ao que fizemos. Além disso, usamos o *software Skychart*, uma efemérides interativa que nos dá acesso virtual ao céu observado por Galileu em 1610, para fazer a comparação dos diagramas de Galileu em [1] com o que seria observado através de um telescópio moderno – cf. Seção 3.<sup>21</sup> Os dados de  $\theta(t)$  colhidos pela leitura do “Mensageiro das Estrelas” que aparecem na Tabela 1 mostram os pontos usados na construção das Figs. 8, 9, 10 e 11, talvez as mais importantes deste artigo.

Que conclusão poderia ser melhor para o nosso estudo do que aquela apresentada por Galileu no seu *Sidereus Nuncius*:<sup>22</sup>

Temos aqui um argumento fino e elegante para aplacar as dúvidas daqueles que, embora aceitem com mente tranquila a revolução dos planetas em torno do Sol no sistema Copernicano, são poderosamente perturbados pela Lua revolver solitária ao redor da Terra e acompanhá-la na sua rotação anual em torno do Sol. Alguns acreditam que essa estrutura de universo deva ser rejeitada como impossível. Mas, agora, temos não apenas um planeta rodando em torno de outro enquanto ambos percorrem uma grande órbita ao redor do Sol; nossos próprios olhos nos mostram quatro estrelas errantes ao redor de Júpiter, assim como o faz a Lua em torno da Terra, enquanto todos juntos traçam uma enorme revolução em torno do Sol no espaço de doze anos.

Tabela 6: Períodos orbitais e raios das órbitas das quatro luas Galileanas de acordo com os ajustes senoidais aos dados de Galileu,  $(T, r)$ ; segundo cálculos empregando os pontos extraídos do *software Skychart*,  $(T_{Skychart}, r_{Skychart})$ ; e conforme a literatura [5],  $(T_{tab}, r_{tab})$ .

	$T(\text{dias})$	$T_{Skychart}(\text{dias})$	$T_{tab}(\text{dias})$
Calisto	$16,60 \pm 0,08$	$16,67 \pm 0,01$	16,689
Ganimesdes	$7,16 \pm 0,02$	$7,145 \pm 0,006$	7,155
Europa	$3,537 \pm 0,009$	$3,549 \pm 0,001$	3,551
Io	$1,773 \pm 0,004$	$1,7688 \pm 0,0001$	1,769
	$r(\times 10^3 \text{ km})$	$r_{Skychart}(\times 10^3 \text{ km})$	$r_{tab}(\times 10^3 \text{ km})$
Calisto	$1876 \pm 6$	$1882 \pm 1,6$	1883
Ganimesdes	$1071 \pm 2$	$1069,7 \pm 0,6$	1070
Europa	$669 \pm 1$	$670,9 \pm 0,1$	671
Io	$422,4 \pm 0,6$	$421,73 \pm 0,02$	422

<sup>21</sup>Escolhemos o *software Skychart* também para demonstrar como ele pode ser empregado como tecnologia de ensino de física e astronomia.

<sup>22</sup>Cf. p. 84, Ref. [1].

## Agradecimentos

Agradecemos aos colegas Maira Tomaz de Carvalho, Dr. Artur Justiniano e Dr. Gustavo Rojas pelas discussões produtivas. Estamos em débito com o parecerista anônimo que realizou uma leitura cuidadosa do manuscrito e contribuiu com inúmeras sugestões para melhorar a versão original; dentre esses comentários destacamos àquele sobre o critério de Rayleigh. Este trabalho foi financiado pela FAPEMIG (processo CEX-APQ-04440-10).

## Referências

- [1] G. Galilei, *Sidereus Nuncius or The Sideral Messenger* (University of Chicago Press, Chicago, 1989).
- [2] D. Halliday, R. Resnick e J. Walker, *Fundamentos de Física: Gravitação, Ondas e Termodinâmica* (LTC, Rio de Janeiro, 2009), 8<sup>a</sup> ed.
- [3] H. Moysés Nussenzveig, *Curso de Física Básica: Fluidos, Oscilações e Ondas* (Edgard Blücher, São Paulo, 1996), 3<sup>a</sup> ed.
- [4] J.H. Vuolo, *Fundamentos da Teoria de Erros* (Edgard Blücher, São Paulo, 1996), 3<sup>a</sup> ed.
- [5] H. Karttunen, P. Kröger, H. Oja, M. Poutanen and K.J. Donner, *Fundamental Astronomy* (Springer, Berlin, 1996), 3<sup>a</sup> ed.
- [6] A. van Helden, *Galileo's Telescope*. Disponível em <http://www.churchmilitant.tv/cia/12Galileo/2.pdf>.
- [7] D. Halliday, R. Resnick and J. Walker, *Fundamentos de Física: Óptica e Física Moderna* (LTC, Rio de Janeiro, 2009), 8<sup>a</sup> ed.
- [8] P. Schlyter, *How to compute rise/set times and altitude above horizon*. Disponível em [www.stjarnhimlen.se](http://www.stjarnhimlen.se).
- [9] E. Wright, *Sidereus Nuncius: Galileo's First Jupiter Observations*. Disponível em <http://home.comcast.net/~erniew/astro/sidnunj.html>.