

# Determinação do módulo de elasticidade de Young por meio de um smartphone

Determination of Young's modulus of elasticity using a smartphone

Marcos Roberto Rossini<sup>\*1</sup>, Paulo Sérgio de Camargo Filho<sup>1</sup>, Kleber Eiti Yamaguti<sup>1</sup>,  
Marcio José Alves<sup>1</sup>, Luís Henrique Cardozo Amorin<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Departamento Acadêmico de Física, Campus Londrina, Londrina, PR, Brasil.

<sup>2</sup>Universidade Federal da Bahia, Instituto de Ciência, Tecnologia e Inovação, Camaçari, BA, Brasil.

Recebido em 25 de maio de 2021. Revisado em 07 de julho de 2021. Aceito em 09 de julho de 2021.

No presente trabalho, apresenta-se uma proposta de atividade didática para estudantes de graduação dos cursos de Física e de Engenharia, visando a determinação do módulo de elasticidade do aço e do alumínio, empregando-se hastes constituídas por estes metais e um smartphone para se obterem os valores das frequências ressonantes dos harmônicos que se nelas estabelecem. A fundamentação teórica considerou a oscilação destas hastes submetidas a flexões simples, com extremos livres. Resolveu-se a equação da dinâmica do movimento para se obter as localizações dos nós, as frequências dos harmônicos, e a relação com o módulo de Young. Os ensaios práticos empregam técnicas de medida bastante simples, equipamentos altamente disponíveis e de muito baixo custo. Os resultados demonstraram a viabilidade da proposta que, além de explorar o ensino por meio de representações múltiplas, possui um forte apelo lúdico e sensorial, inclusive para estudantes com deficiência auditiva. Também há um viés de aplicabilidade para o ensino médio.

**Palavras-chave:** Ensino de Física, frequência natural, ressonância, módulo de elasticidade, hastes, smartphone.

In the present work, a didactic activity proposal is presented for undergraduate students of Physics and Engineering courses, aiming at determining the elasticity module of steel and aluminum, using rods constituted by these metals and a smartphone to obtain the values of the resonant frequencies of the harmonics that are established in them. The theoretical foundation considered the oscillation of these rods submitted to simple flexions, with free ends. The motion dynamics equation was solved to obtain the locations of the nodes, the frequencies of the harmonics, and the relationship with the Young's modulus. The practical tests employ simple measurement techniques, highly available equipment and very low cost. The results demonstrate the feasibility of the proposal, which, in addition to exploring teaching through multiple representations, has a strong playful and sensory appeal, including for students with hearing disabilities. There is also an applicability bias for high school.

**Keywords:** Physics teaching, natural frequency, resonance, modulus of elasticity, rods, smartphone.

## 1. Introdução

Edificações e inúmeras máquinas submetem-se a esforços estáticos e dinâmicos que geram deformações, as quais necessitam ser muito bem dimensionadas para que se garanta a integridade física [1–10]. Nesse mister, entre diversas outras propriedades dos materiais, é essencial o conhecimento do módulo de elasticidade de Young dos componentes que estruturam os artefatos tecnológicos, justificando o porquê de esta grandeza ser objeto de perseverante estudo. Diversas metodologias foram desenvolvidas para se calcular o módulo de elasticidade. O método tradicional emprega a medida da deformação de uma amostra submetida a esforços que geram flexão ou alongamento do material. Outra metodologia envolve a medida da velocidade do som, requerendo equipamentos mais sofisticados [2, 11–14]. Uma vez entendida a relevância deste parâmetro, fica justificada a proposição de

uma prática de física para a graduação que objetiva obtê-lo para o aço e para o alumínio, empregando materiais e aparatos acessíveis e de baixo custo, enquanto adota uma metodologia muito simples e bastante lúdica.

Assim como a medida da constante elástica de uma mola pode ser feita por ensaios estáticos de compressão e alongamento ou por análise da frequência natural de oscilação [15, 16], a medida do módulo de elasticidade também pode ser feita por ensaios análogos de tração e compressão, ou pela frequência natural de vibração das amostras [17, 18]. A diferença essencial nesta comparação, é que a constante elástica depende da geometria da mola e do material que a constitui, enquanto o módulo de elasticidade depende exclusivamente do material. Aqui, optou-se pela análise da frequência de oscilação dos harmônicos, que traz a vantagem de explorar a ondulatória [19, 20], pré-requisito para o estudante compreender Mecânica Quântica [10, 21–23]. Assim, é sempre bem-vindo o estudo de um fenômeno cotidiano envolvendo ondas, preparando o discente para voos mais

\* Endereço de correspondência: rossini@utfpr.edu.br

elevados. Outro fator que veio ao encontro da escolha foi a facilidade da coleta de dados, basicamente a medida do comprimento, da massa e do diâmetro de hastes, e a medida das frequências de ressonância dos harmônicos que nela se estabelecem, estas últimas feitas com um smartphone. Os ensaios exigem a manipulação adequada das hastes para a obtenção dos harmônicos. Isto não é difícil. De fato, é uma atividade cativante que promove o desenvolvimento da audição e da concentração do estudante, requisitos facilmente adquiridos sob a orientação do professor.

Interferência, batimento e ressonância são temas bastante difíceis de ensinar e aprender sem a experiência sensorial. A música e os instrumentos musicais oferecem vastas opções que favorecem o processo, permitindo que fenômenos ondulatórios e suas descrições matemáticas ganhem significado na percepção do aprendiz [24–26]. Os padrões de Chladini [27], as figuras pirotécnicas do Tubo de Rubens [28], a disposição do pó de cortiça no interior de um tubo acústico de ondas estacionárias [29, 30] e a formação de ventres e nodos em cordas vibrantes excitados por um gerador de áudio são belíssimos exemplos de atividades experimentais envolvendo acústica física. Aqui, agrega-se mais uma atividade que vem ao encontro do professor de física, trazendo a perspectiva de ensino por meio de multimodos e múltiplas representações semióticas [31]. Nessa perspectiva, a presente proposta confere não apenas benefícios motivacionais, mas também conduz o aluno a um profundo entendimento do conteúdo científico a ser ensinado [32]. Ao introduzir o uso coordenado de múltiplas representações em situações de aprendizagem, oferecem-se aos estudantes um leque de oportunidades para construir um determinado conceito científico, ou seja, se um aluno não o consegue entender em relação a uma representação particular, outra poderá ser mais envolvente e eficaz [33, 34], de sorte que, uma complementa a outra.

A intensidade sonora exaltada e o timbre metálico típico dos harmônicos em metais são fortes apelos sinestésicos que contribuem como âncoras conceituais. O estudante poderá tatear a haste que ressoa sentindo a vibração mais intensa dos ventres e a quietude dos nós. Isto é particularmente rico para o ensino daqueles que apresentem alguma limitação auditiva. Ainda há os gráficos do nível de intensidade sonora versus frequência, gerados em tempo real na tela do smartphone, onde o estudante pode observar os picos que ocorrem quando a ressonância é obtida, e a redução da amplitude destes conforme a intensidade sonora diminui. Estes elementos sinestésicos e visuais contribuem para a aquisição dos fundamentos que se tornarão conhecimentos prévios de uma aprendizagem significativa para aprofundamentos posteriores [35]. Tal processo de ensino é muito impactante porque não se limita a mera transmissão de conhecimento, mas fomenta a observação, a reflexão crítica e a avaliação, essenciais para o desenvolvimento

da ciência e da tecnologia [36], e fundamentalmente, para o desenvolvimento humano.

Enfim, admitindo-se que qualquer equipamento empregado no auxílio do processo ensino-aprendizagem seja um recurso didático [36], o smartphone elenca-se como elemento muito importante, agregando diversas funções muito úteis, como cronômetro, câmera digital, armazenamento e compartilhamento de dados, leitura de textos, e ainda a flexibilidade para instalação de diversos aplicativos [37]. Isto exemplifica como o telefone celular revela vasto espectro de potencialidades a serem exploradas por docentes e estudantes [38]. Some-se a isto que atividades lúdicas favorecem a aprendizagem, e a popularidade, a facilidade com a qual os jovens utilizam as mais diversas funções do aparelho, e encontram-se mais incentivos para o emprego deste dispositivo tão versátil [39, 40]. Esta resignificação é positiva, abandona o paradigma que o considera exclusivamente como objeto de lúdico fútil, competindo negativamente com o trabalho docente durante o exercício de uma atividade didática.

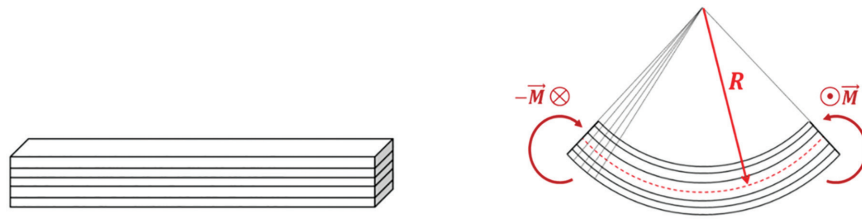
## 2. Equação de Ondas em Hastes

A dinâmica de uma haste que oscila é um pouco mais sofisticada que aquela utilizada para descrever a propagação de uma onda transversal em um fio delgado fino e homogêneo cujo peso possa ser desconsiderado, mas há algumas semelhanças que merecem atenção para darem suporte ao entendimento do movimento das hastes [3, 4, 16, 41]. Assim, a título de algumas analogias com a equação das ondas em hastes e tubos, que se apresentará mais adiante, a equação de onda em fios delgados que descreve a dinâmica de uma onda transversal em uma corda homogênea e delgada percorrida por uma onda de pequena amplitude em relação ao comprimento da corda, obtida com algumas hipóteses simplificadoras [16], é:

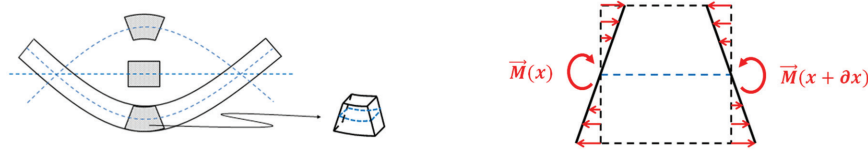
$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} Y(x, t) = \frac{F}{\mu} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} Y(x, t) \quad (1)$$

sendo  $F$  o módulo da força tensora,  $\mu = m/L$  a densidade linear,  $m$  a massa e  $L$  o comprimento do fio (ou da corda).

A equação (1) é uma equação de onda porque qualquer função  $Y(x, t) = Y(x \pm v \cdot t)$  é solução, desde que o módulo da velocidade da onda seja  $v = \sqrt{F/\mu}$ . Esta equação também é linear, ou seja, se  $Y_m(x, t)$  e  $Y_n(x, t)$  forem soluções, então uma combinação linear destas funções também o será. Particularmente, se  $Y_m(x, t)$  e  $Y_n(x, t)$  forem duas ondas periódicas senoidais de mesma amplitude e frequência que se movem em sentidos opostos, existe a possibilidade de ocorrerem ondas estacionárias, desde que obedecidas certas condições de contorno. Particularmente, para uma corda de comprimento  $L$ , cujos extremos estão fixos em  $x = 0$  e em  $x = L$ , a solução geral para os possíveis harmônicos



**Figura 1:** À esquerda uma haste (ou uma viga) inicialmente relaxada. À direita, sofre flambagem sob ação do momento fletor  $\vec{M}$ . A linha tracejada em vermelho representa a linha neutra.



**Figura 2:** À esquerda, algumas formas assumidas por uma porção elementar da haste que oscila. À direita, a ação dos momentos fletores  $\vec{M}(x,t)$  e  $\vec{M}(x + \partial x,t)$ , responsáveis pela deformação do elemento.

estacionários é [16]:

$$\phi_n(x,t)_{corda} = A_n \cdot \text{sen} \left( n\pi \cdot \frac{x}{L} \right) \cdot \cos \left( n\pi \cdot \frac{vt}{L} + \varphi_n \right),$$

$$n = 1, 2, 3 \dots \tag{2}$$

onde  $A_n$  e  $\varphi_n$  são constantes que dependem das condições iniciais. As condições de contorno  $\phi_n(0,t)_{corda} = \phi_n(L,t)_{corda} = 0$  foram responsáveis pela quantização das frequências  $f_n = v/\lambda_n = n \cdot v/2L$  dos harmônicos. Esse resultado é algo importante de se assinalar para os estudantes do curso de Física porque ocorrerá o mesmo com algumas soluções da equação de Schrödinger para problemas didaticamente importantes, como o poço quadrado infinito, permitindo-lhe perceber que a quantização surge da necessidade de o tamanho da onda ser um múltiplo da largura do poço, e uma vez quantizado comprimento de onda, o momento linear também o será, visto que  $p = h/\lambda$  [23, 42]. Para potenciais constantes, também implicará que a energia cinética e a energia total do sistema estarão quantizadas.

A equação de onda em cordas finas, equação (1), considera, por hipótese, uma força tensora constante, mas em hastes, ocorrem tensões internas que não podem ser desprezadas, de forma que mais algumas hipóteses precisam ser incluídas. Tubulações, pilares, vigas e hastes, ao serem deformadas, sujeitam-se a ação de torques internos, denominados momentos (de força) fletores. Consequentemente, para se chegar até a equação de uma onda transversal que percorre uma haste ou um tubo metálico, é necessária a inclusão do momento fletor,  $\vec{M}$ , que provoca alongamento na sua porção convexa e compressão na porção côncava [41]. Por simplicidade, o modelo assume apenas flexões simples em um único plano. Imagine-se a haste sendo constituída por um feixe de lâminas de mesmo comprimento sobrepostas, como

apresentado à esquerda da Figura 1, para se compreender como a ação do momento fletor gera flambagem e provoca a tendência de estas lâminas escorregarem, exceto aquela que se encontra na linha neutra, cujo comprimento não se altera.

A modelagem do problema exige o conhecimento básico dos conceitos de tensão,  $\sigma$ , deformação,  $\varepsilon$ , e do módulo de elasticidade de Young,  $E$ , [12, 19]. Estas grandezas são geralmente tratadas superficialmente nos livros de graduação em Física [16, 43–45], embora fartamente discutidos nos livros destinados ao ensino de resistência dos materiais [41, 46] dos cursos de engenharia. Para um elemento infinitesimal da haste, Figura 2, admite-se apenas a presença de movimento na direção vertical. À exceção dos extremos, cada elemento infinitesimal recebe a ação do elemento que o precede e daquele elemento que o sucede, e estará sujeito a forças que o deformarão como se fosse o fole de um acordeom, devidas à tensão normal  $\sigma_n = dF_n/dA$ . Assumindo-se que as deformações ocorram dentro do regime elástico, a Lei de Hooke fornecerá a relação  $\sigma_n = E \cdot \varepsilon$ , onde  $\varepsilon$  é a deformação (relativa) do material.

O objetivo deste artigo não é apresentar a dedução da equação que descreve o movimento de uma haste com as hipóteses consideradas, que pode ser encontrada na literatura [41, 46, 48], mas apresentar uma prática que envolva a presença de modos normais de vibração em hastes e tubos. Então, assume-se que esta equação seja

$$\mu \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} Y(x,t) = -E \cdot I \cdot \frac{\partial^4}{\partial x^4} Y(x,t) \tag{4}$$

sendo  $I$  o momento de inércia (de superfície) da haste e  $E$  seu módulo de elasticidade. Está implícito na equação (4) que sua validade depende de que sejam satisfeitas algumas condições para qualquer elemento da

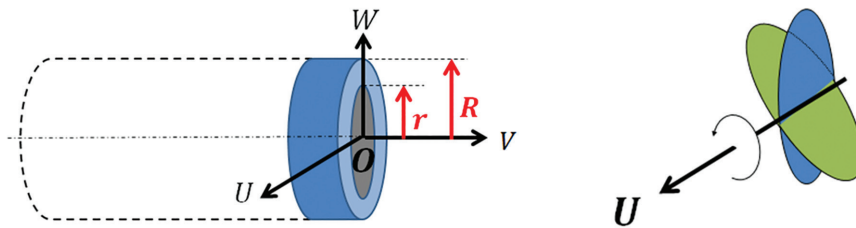


Figura 3: À esquerda, o elemento de haste cilíndrica considerando os eixos  $U$ ,  $V$  e  $W$ .

haste [16, 41, 46, 47]:

$$\mu \cdot \partial x \cdot \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = \partial F_y \tag{5}$$

$$\frac{\partial F_y}{\partial x} = -\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} \tag{6}$$

$$M = E.I. \cdot \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} \tag{7}$$

observando-se que a equação (5) é consequência da aplicação da segunda Lei de Newton, equação (6) decorre da exigência de os elementos não rotacionarem (torque resultante nulo), e a equação (7) resulta do relacionamento das tensões normais com o momento fletor.

O momento de inércia,  $I$ , dado nas equações (4) e (7), não está associado a rotações em torno do eixo de simetria do elemento de haste, eixo  $V$  da Figura 3, mas é relativo a um eixo perpendicular a ele. Considerando que o momento fletor age provocando tendência de rotação em relação da face lateral do elemento em relação ao eixo  $U$ , emprega-se o Teorema dos Eixos Perpendiculares, [16, 48], para se obter  $I = \pi(D^4 - d^4)/64$ , sendo que, para hastes cilíndricas maciças, considera-se  $d = 0$ .

Como mencionado anteriormente, a experiência auditiva e tátil com tubos e hastes vibrantes permite que sejam identificadas regiões de nós e ventres e a presença de harmônicos, analogamente ao que ocorre com as cordas. Isto sugere que a equação (4) possa fornecer soluções que descrevam modos normais de oscilação. Matematicamente, as ondas estacionárias unidimensionais podem ser representadas pelo produto de duas funções de uma única variável [47],  $Y(x, t) = y(x) \cdot g(t)$ . Substituindo-se  $Y(x, t)$  por  $y(x) \cdot g(t)$  na equação (4), encontra-se

$$\frac{1}{g} \cdot \frac{d^2 g}{dt^2} = -\left(\frac{E.I.}{\mu}\right) \cdot \frac{1}{y} \cdot \frac{d^4 y}{dx^4} \tag{8}$$

a qual só pode ter solução não trivial se os dois membros forem constantes e diferentes de zero, visto que as variáveis  $t$  e  $x$  são independentes, ou seja,

$$\frac{d^2 g}{dt^2} = -\omega^2 \cdot g \tag{9}$$

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = k^4 \cdot y \tag{10}$$

$$\omega = k^2 \cdot \sqrt{\frac{E.I.}{\mu}} \tag{11}$$

Na equação (9) somente se buscam as soluções para as quais  $\omega^2 > 0$ , que representam as oscilações periódicas. Assim considerado, a solução geral das equações (9) e (10) é relativamente simples, de modo que

$$Y(x, t) = [B_1 \cdot \text{sen}(k.x) + B_2 \cdot \text{cos}(k.x) + B_3 \cdot \text{senh}(k.x) + B_4 \cdot \text{cosh}(k.x)] \cdot \text{cos}(\omega \cdot t + \alpha_0) \tag{12}$$

sendo  $\alpha_0$ ,  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $B_3$  e  $B_4$  constantes serem determinadas pelas condições iniciais e pelas condições de contorno do problema [49]. Considerando-se que os extremos da haste, localizados em  $x = 0$  e em  $x = L$ , estejam livres, impõe-se ao momento fletor que  $M(0) = M(L) = 0$ , e o mesmo para a componente vertical da força tensora,  $F_y(0) = F_y(L) = 0$ :

$$M = 0 \rightarrow \frac{d^2}{dx^2} y = 0 \text{ para } \begin{cases} x = 0 \\ x = L \end{cases} \tag{13}$$

$$F_y = 0 \rightarrow \frac{d^3}{dx^3} y = 0 \text{ para } \begin{cases} x = 0 \\ x = L \end{cases} \tag{14}$$

que, ao serem levadas na equação (12), com um pouco de paciência e álgebra, encontra-se:

$$\Psi(x, t) = A \cdot \text{cos}(\omega \cdot t + \alpha_0) \cdot \{[\text{sen}(k.x) + \text{senh}(k.x)] - B \cdot [\text{cos}(k.x) + \text{cosh}(k.x)]\} \tag{15}$$

para  $A = C.B_1$  e

$$B = \frac{\text{senh}(k.L) - \text{sen}(k.L)}{\text{cosh}(k.L) - \text{cos}(k.L)} \tag{16}$$

$$\text{cos}(k.L) \cdot \text{cosh}(k.L) = 1 \tag{17}$$

A equação (17) é uma equação transcendental. Na Tabela 1 apresentam-se os cinco primeiros valores do produto  $k_n \cdot L = z_n$ , obtidos numericamente empregando-se o método de Newton-Raphson [50, 51]. Na Figura 4 representam-se os cinco primeiros

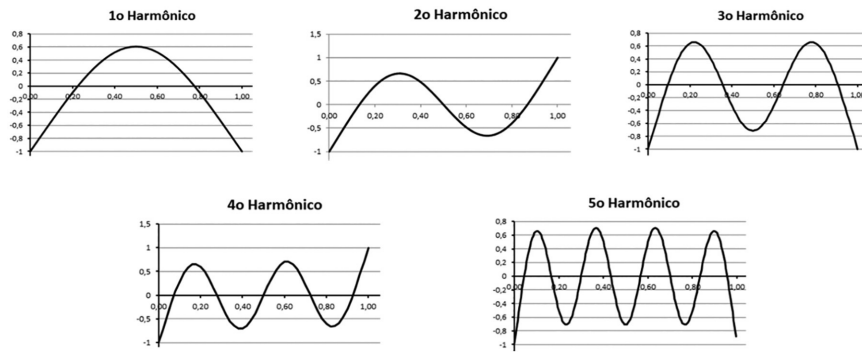


Figura 4: Componente espacial da onda estacionária estabelecida na haste,  $y_n(x)$ , para os cinco primeiros harmônicos.

Tabela 1: Cinco primeiros valores possíveis para  $z_n = k_n \cdot L$ , e as posições relativas dos nós ( $x_{nó}/L$ ) para os harmônicos correspondentes.

$n$	$z_n = k_n \cdot L$	$x_{nó}/L$				
1	4,73004	0,22415 0,77585				
2	7,85320	0,1321	0,5000	0,8679		
3	10,99561	0,0944	0,3558	0,6442	0,9056	
4	14,13717	0,0735	0,2767	0,5000	0,7233	0,9265

harmônicos oriundos desta resolução. Observe-se que a posição relativa dos nós,  $x_{nó}/L$ , não depende do material que constitui a barra, desde que seja uma liga metálica homogênea, nem da sua secção transversal, que não deve variar ao longo da haste.

Com os dados da Tabela 1, e lembrando-se que  $\omega = 2\pi \cdot f$ ,  $k_n = z_n/L$ ,  $\mu = m/L$ , e que a densidade volumétrica da liga metálica que constitui a haste seja  $\rho = \mu/(D^2 - d^2)$ , a equação (11) permite que se obtenha:

$$Y = \frac{64\pi^2}{z_n^4} \cdot \rho \cdot \frac{L^4}{D^2 - d^2} \cdot f_n^2 \tag{18}$$

ou

$$f_n = \left[ \frac{1}{8\pi} \sqrt{\frac{Y \cdot (D^2 - d^2)}{\rho}} \right] \cdot \frac{z_n^2}{L^2} \tag{19}$$

O termo entre colchetes na equação (19) é constante para determinado conjunto de tubos com os mesmos diâmetros e constituídos pelo mesmo metal, implicando que, para um conjunto de hastes que cumpram estas hipóteses, há uma relação linear entre a frequência do harmônico e o inverso do quadrado do comprimento de cada haste, algo que pode ser facilmente verificado experimentalmente. A equação (19) também mostra que a frequência de oscilação será maior para materiais com maior módulo de elasticidade e menor densidade. Algo muito semelhante com o que ocorre com o oscilador harmônico constituído por uma massa conectada a uma mola, ou com a roda Catarina do relógio mecânico conectada a uma mola helicoidal [43]. O incremento do

comprimento da haste tende a diminuir a frequência de oscilação porque os comprimentos de onda serão maiores. Este é um efeito muito fácil de perceber quando se escuta um sino dos ventos tocando, e verifica-se que os tubos mais longos são responsáveis pelas emissões sonoras mais graves.

### 3. Atividade Experimental

A prática proposta requer essencialmente algumas hastes ou tubos de aço e alumínio, uma serra para corte de metais, um rolo de fita crepe, uma trena, um paquímetro, uma balança e um telefone celular onde se instale um aplicativo que indique o nível de intensidade sonora em função da frequência. O telefone utilizado foi um modelo da LENOVO com versão Android 5.5.1, 8 core, 1.5 GHz, e o aplicativo que se utilizou foi o *Spectroid*. Sua instalação foi extremamente simples, bastando solicitar o download no Play Store. Apenas o valor da frequência de ressonância de cada harmônico é necessário para esta prática, mas o professor poderá explicar aos alunos o significado do nível de intensidade sonora e sua unidade. O gráfico dinâmico apresentado pelo aplicativo facilitará muito a compreensão do conceito.

Deve-se verificar a precisão da leitura feita pelo aplicativo, considerando ainda que o mesmo aplicativo poderá fornecer valores distintos para a mesma frequência, dependendo do modelo do microfone de cada aparelho celular [52]. Inicialmente, tomou-se um vídeo no canal YOUTUBE onde são mostrados alguns padrões de Chladini [27]. Na Figura 5 observa-se que o aplicativo apresenta a frequência de pico em acordo com os dados mostrados no vídeo, a qual será considerada como frequência de ressonância. Note-se a presença do ruído de fundo do ambiente, e que cada pico apresenta uma pequena base, correspondendo a uma estreita faixa de valores do espectro sonoro. Avaliou-se a precisão oferecida pelo sistema do aplicativo instalado no modelo LENOVO utilizando-se um gerador de áudio da empresa BRAX e de um osciloscópio TBS 1102B-EDU da Tectronix. O gráfico da Figura 6 representa os valores da frequência lida pelo Spectroid em função da frequência do som fornecido pelo

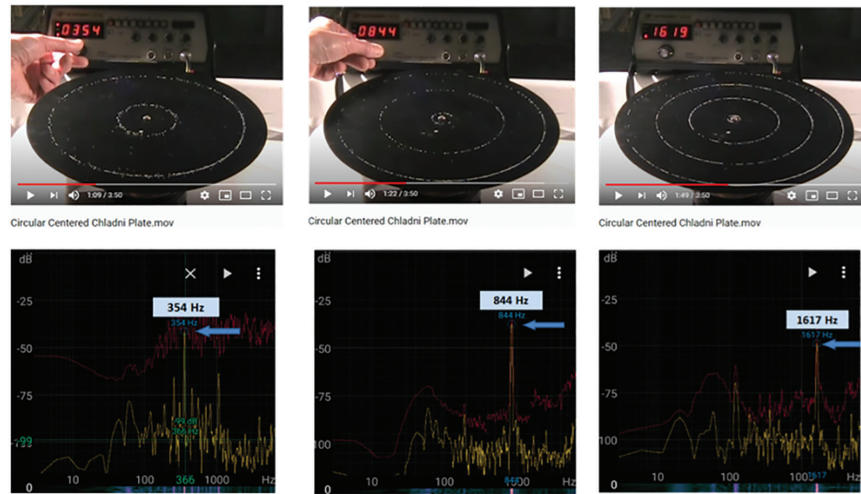


Figura 5: Acima, três harmônicos em placas circulares com os padrões de Chladini. Abaixo, a leitura das frequências empregando o software *Spectroid* instalado em um Smartphone *LENOVO*.

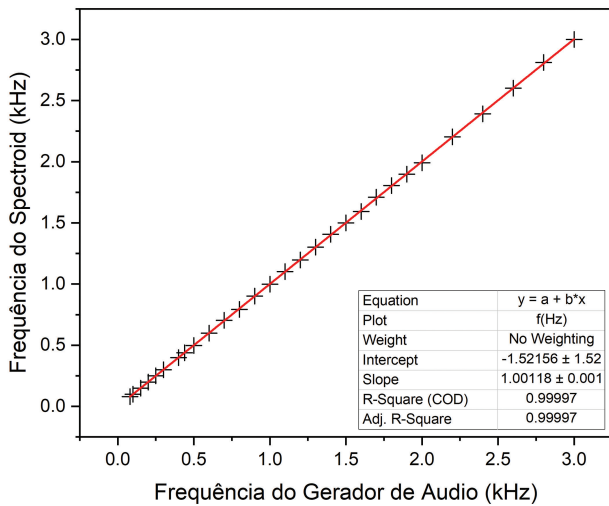


Figura 6: Frequência lida pelo aplicativo *Spectroid* em função da frequência sonora fornecida pelo gerador de áudio.

gerador, cujo ajuste com uma função de primeiro grau forneceu  $f_{Spectroid} = 1,0012 \cdot f_{Gerador} - 1,5216 \text{ Hz}$ , e um coeficiente de determinação  $R = 0,99997$ .

Tendo-se em mãos o material necessário para a realização da prática, separam-se os tubos e as hastes em conjuntos com os mesmos materiais e com as mesmas seções transversais, diferindo apenas no comprimento ( $L$ ). Para um dado conjunto, medem-se as massas de cada haste, ou tubo, os comprimentos e os diâmetros. Em seguida, para cada elemento de um conjunto em estudo, com auxílio da trena, localizam-se os locais onde se espera encontrar o nó do segundo harmônico, a uma distância de  $0,1321 \cdot L$  das extremidades, e o nó central, no meio da barra, conforme a Tabela 1 e a Figura 4. Um pedaço de fita crepe pode ser colado sobre cada nó, destacando o local preciso com um pequeno risco em

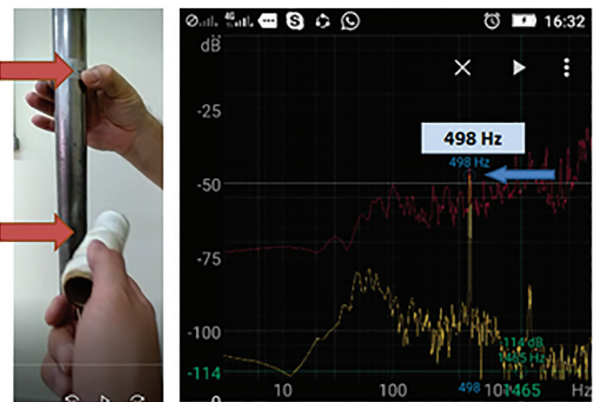


Figura 7: À esquerda, acima, a barra é segura pelo local onde o nó se encontra, e tangida próximo ao ponto onde deve se encontrar o ventre. À direita, a frequência de ressonância do segundo harmônico, indicada pelo *Spectroid*.

caneta, facilitando sua localização, conforme a Figura 7. Sugere-se que se inicie pelo segundo harmônico porque o nó localizado no centro da haste é muito fácil de ser determinado, bastando segurar o tubo pela porção central e tangê-lo, como se fosse um instrumento de percussão.

Uma vez localizadas as posições previstas para os nós, inicia-se o processo experimental. A haste ou o tubo devem ser segurados pelo meio, preferencialmente com os dedos indicadores e polegar, e tangidos na porção entre dois nós consecutivos com auxílio de um material rígido e não metálico, como indicado na Figura 7, evitando outras fontes sonoras e danos aos elementos. Sugere-se bater na haste sobre o local onde deverá ocorrer o ventre porque facilita a obtenção do harmônico. Será possível ter a certeza de que a haste foi corretamente pinçada sobre o nó devido ao ressoar metálico e intenso do som





**Figura 8:** À esquerda, um sino dos ventos. Na sequência, a representação de uma haste vibrando no modo fundamental, e ao lado, o local onde se deve fazer um pequeno furo para se suspender cada tubo do sino. À direita, demarcação do local previsto para a posição dos nós no primeiro harmônico.

emitido e pela presença do pico de intensidade sonora no gráfico do *Spectroid*. Durante o processo, rapidamente os alunos aprenderão a localizar os nodos e a maneira correta de segurar a haste, como quem aprende a usar um instrumento musical primitivo, aprimorando sua percepção auditiva. É um exercício muito agradável que relaciona os conceitos físicos com elementos sensoriais.

Nos ensaios, o microfone do smartphone foi mantido a uma distância de  $(10 \pm 1)$  cm da haste, e observou-se que a intensidade sonora na ressonância mudava para cada harmônico e para cada tipo de haste. A força com a qual se tangia a haste também causava variação da intensidade sonora, mas era um parâmetro mais difícil de ser controlado. Contudo, para a determinação do módulo de elasticidade, não se necessita do valor do nível de intensidade sonora, basta que seja possível a visualização do seu pico e se obtenha a leitura da frequência de ressonância.

A ressonância pode não ocorrer na primeira tentativa. Talvez seja necessária uma ligeira alteração, da ordem de milímetros, no ponto onde se segura a barra. Após se obter o segundo harmônico, deve-se segurá-la na região onde se encontra um dos nós externos, tangendo-a e verificando se a frequência de ressonância é a mesma. A seguir, passa-se a um novo procedimento visando justificar por que não ressoa se não for segurada pela região muito próxima ao nó: Enquanto a barra estiver vibrando, um estudante deve segurá-la simultaneamente em dois locais onde se encontram nós, observando que não sente a vibração, enquanto outro deve tateá-la delicadamente sobre um ventre para sentir a vibração intensa, e depois aplicar mais pressão para perceber como a vibração rapidamente é amortecida. O professor poderá apontar o erro de manufatura do sino dos ventos que não ressoa por que suas hastes não estão suspensas pelo local onde encontra-se o nó (Figura 8). Algumas raras vezes, quando se segura a barra apenas pela porção central, pode-se observar o quarto harmônico, que também pode ser registrado. Isto acontece porque o quarto harmônico também apresenta um nó central, como mostrado na Figura 4, e coincidentemente a haste foi percutida na região onde ocorre o ventre para este harmônico. Nas Tabelas 2 e 3 são apresentados os

**Tabela 2:** Valores das frequências de ressonância obtidas a partir de eletrodutos de aço cujos diâmetros internos e externos eram, respectivamente,  $d = (24,4 \pm 0,1)$  mm e  $D = (25,4 \pm 0,1)$  mm.

Eletroduto	$L_n$ (m)	$n$	$f_n$ (Hz)
1	0,7074	1	322
		3	1664
		4	2930
2	0,5545	1	510
		2	1383
3	0,7724	1	264
4	0,7283	1	297
5	0,6909	1	330
6	0,6689	1	352
7	0,6307	1	396
8	0,5983	1	<b>440</b>
9	0,5641	1	<b>495</b>
		2	528

**Tabela 3:** Valores das frequências de ressonância para tubulações de aço com diâmetro interno  $d = (35,8 \pm 0,4)$  mm e externo  $D = (38,3 \pm 0,2)$  mm.

Tubo	$L_n$ (m)	$n$	$f_n$ (Hz)
1	0,9912	1	240
		2	650
2	0,7995	2	998
		1	85
3	1,68190	2	234
		4	738
		1	343
5	2,49885	4	343
		1	<b>439</b>
6	0,736	2	1172
		1	<b>498</b>
7	0,691	2	1324

resultados das medidas para dois conjuntos de tubos, e nas Figuras 9 e 10, os respectivos gráficos gerados a partir destas Tabelas, considerando a equação (19) e os valores de  $z_n$  apresentados na Tabela 1.

A interpolação linear do gráfico da Figura 9 relativo aos eletrodutos da Tabela 2, impondo-se nulo o

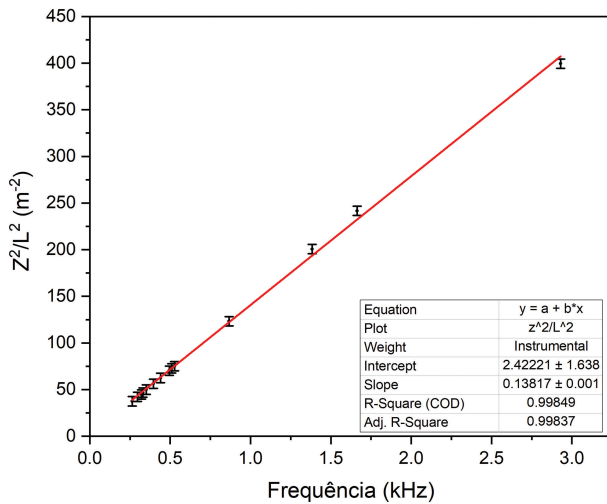


Figura 9: Gráfico obtido a partir dos dados do conjunto de eletrodutos da Tabela 2.

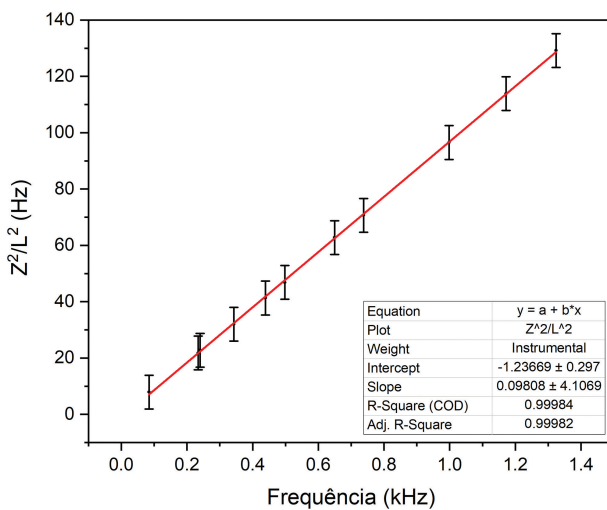


Figura 10: Gráfico obtido a partir dos dados do conjunto de tubos da Tabela 3.

coeficiente linear, permitiu obter a relação  $f_{2n}(L) = 7,155 \cdot z_n^2 / L^2$  com  $R^2 = 0,99849$ , em unidades do Sistema Internacional. Para o gráfico da Figura 10, referente a Tabela 3, encontrou-se  $f_{3n}(L) = 10,346 \cdot z_n^2 / L^2$ , nas mesmas unidades, com  $R^2 = 0,99984$ . Ambas indicam boa previsão do modelo quando comparadas com a equação (19). Observe-se a sofisticação desta equação que prevê o valor da frequência em função do comprimento para diversos harmônicos e comprimentos distintos para os diversos tubos. Particularmente, para o primeiro harmônico, com  $z_1 = 4,73004$ , encontra-se a uma expressão que prevê o comprimento destas hastes em função da frequência fundamental desejada. Para os tubos da Tabela 2, o comprimento é  $L_{Q2} = 4,730 \text{ m} \cdot \sqrt{7,155 \text{ Hz} / f_1}$ , algo bastante útil acaso se deseje projetar um instrumento musical de percussão ou um sino dos ventos. Com uma versão preliminar

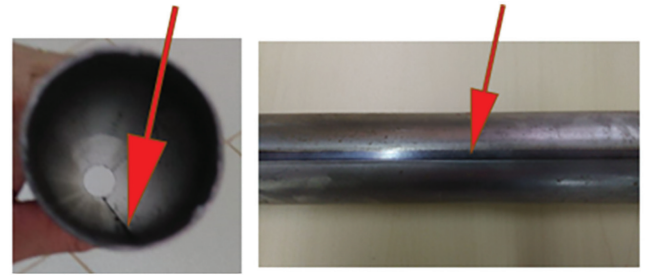


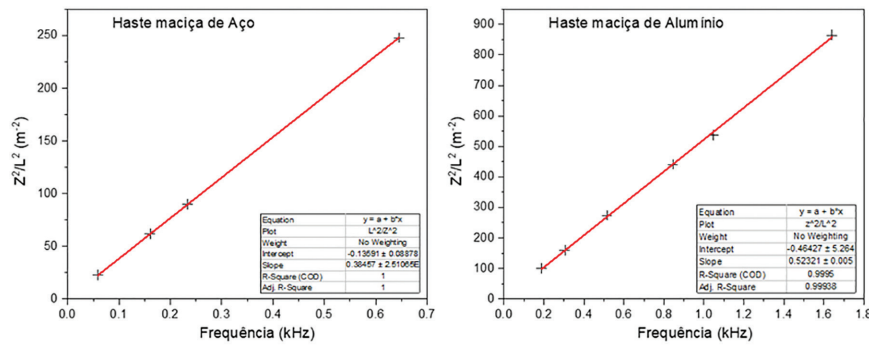
Figura 11: Detalhe da linha de solda nas tubulações.

desta relação foi possível estimar-se o comprimento da haste que ressoaria com o Lá fundamental, 440 Hz, encontrando-se  $L_{Lá} = 60,13 \text{ cm}$ . Para a nota Si, 495 Hz, encontra-se  $L_{Si} = 56,69 \text{ cm}$ . Analogamente, para o conjunto de tubos da Tabela 3, a relação é  $L_{Q3} = 4,730 \cdot \sqrt{10,346 / f_1}$ , prevendo-se  $L_{Lá} = 72,53 \text{ cm}$  e  $L_{Si} = 68,38 \text{ cm}$ . Observem-se, nos respectivos Tabelas, em negrito na coluna da direita, os comprimentos de tubulações cortados com valores de próximos aos previstos e as respectivas frequências. Os cortes não foram mais precisos porque foram feitos manualmente com arco de serra (devido a pandemia as oficinas da UTFPR-LD estavam fechadas).

Quando se procurou determinar o módulo de elasticidade do aço aplicando-se os dados das Tabelas 2 e 3 na equação (18), observou-se que não seria possível. Nem mesmo a densidade esperada para o aço,  $7,88 \text{ g/cm}^3$  (aço inox 304) pôde ser obtida dividindo-se a massa pelo volume. Mesmo retirando-se cautelosamente as limalhas do corte e cuidando-se para não medir os diâmetros internos nas bordas dos tubos, encontrou-se  $\rho = (5,9 \pm 1,3) \text{ g/cm}^3$ . Uma análise mais cuidadosa mostrou que as amostras não eram cilíndricas como aparentavam, revelando uma linha de solda ao longo da lateral, mostrada na Figura 11, indicando que os tubos eram confeccionados a partir de lâminas dobradas e soldadas. Esta nova informação contribuiu para mostrar que o modelo matemático era viável porque, na equação (11), somente se considera que o momento de inércia seja constante, independentemente de a seção transversal do tubo ser cilíndrica ou não. Para se evitar o problema apresentado pelos tubos, decidiu-se trabalhar com materiais maciços,  $d = 0$ . Foram utilizadas duas hastes de aço inox e duas de alumínio. Com as novas amostras, foram feitos diversos ensaios, cujos resultados encontram-se expostos nas Tabelas 4 e 5.

Aplicando-se a equação (18) aos dados da Tabela 4, obteve-se para o aço o coeficiente  $E_{aço} = (209 \pm 2) \text{ GPa}$ , muito próximo do valor de referência,  $E_{aço} = 210 \text{ GPa}$  [2, 53] apresentando um desvio relativo de 1%. Com os dados da Tabela 5, encontrou-se para o alumínio o coeficiente  $E_{Al} = (65 \pm 1) \text{ GPa}$ . Tomando como valor de referência  $E_{Al} = 69 \text{ GPa}$ , encontra-se um desvio relativo de 6%, embora haja outros valores do





**Figura 12:** À esquerda, gráfico de  $z_n^2/L^2$  em função das frequências de ressonância para a haste maciça de aço (Tabela 4). À direita, o gráfico para a barra de alumínio maciço (Tabela 5).

**Tabela 4:** Valores do módulo de elasticidade em função das frequências de ressonância para duas hastes de aço, diâmetro  $D = (38,3 \pm 0,2)$  mm e densidade  $\rho = (7827 \pm 53)$  kg/m<sup>3</sup>.

Tubos	$L_n$ (m)	$N$	$f_n$ (Hz)	$Y$ (GPa)
1	$0,4988 \pm 0,0005$	1	229	208,11
		2	632	208,09
2	$0,9985 \pm 0,0005$	1	59	212,76
		2	161	208,51

**Tabela 5:** Valores do módulo de elasticidade em função das frequências de ressonância para duas hastes maciças de alumínio, diâmetro  $D = (38,3 \pm 0,2)$  mm e densidade  $\rho = (7827 \pm 53)$  kg/m<sup>3</sup>.

Haste	$L_n$ (m)	$N$	$f_n$ (Hz)	$Y$ (GPa)
1	0,4750	1	188	64,86
		2	516	64,30
		3	1048	63,85
2	0,3740	1	305	65,72
		2	844	66,23
		3	1641	65,14

módulo de elasticidade para o alumínio, dependendo da liga. Na Figura 12 são apresentados os gráficos destes ensaios, onde se observam as relações entre a frequência e o comprimento  $f_{n-Aço}(L) = 2.602.z_n^2/L^2$ ,  $R_{Aço}^2 = 1,0000$ , e  $f_{n-Al}(L) = 1,9132.z_n^2/L^2$ ,  $R_{Al}^2 = 0,9995$ , para o aço e para o alumínio, respectivamente, em unidades do S.I.

Ressalta-se que não se observou ressonância do ar no interior dos tubos. Entende-se que ela dificilmente ocorrerá, por duas questões. Primeiramente porque os tubos oscilavam transversalmente, de forma que se pode supor a inexistência de uma fonte sonora que oscile longitudinalmente e excite o ar no interior do tubo de modo a gerar os harmônicos. Em segundo lugar, em um tubo aberto, os comprimentos de onda dos harmônicos ( $\lambda_n$ ) relacionam-se com o comprimento ( $L$ ) dos tubos de um modo bem regular ( $\lambda_n = 2L/n$ ). Considerando que a velocidade do som no ar seja  $v_{ar}$ ,

as frequências dos harmônicos seriam  $f_n = n.v_{ar}/2L$ , que dificilmente coincidiriam com as frequências dos harmônicos dos tubos. Por exemplo, observando-se a Tabela 2, o tubo de comprimento  $L = 0,5983$  m oscila a uma frequência de 440 Hz. As frequências de ressonância do som para este tubo seriam da ordem de  $f_n = n.(340 \text{ m/s})/(2.0,5983 \text{ m})$ , ou seja,  $f_n = n.283$  Hz, bem distintas das frequências de ressonância do tubo.

Os tubos não se mostraram adequados para a determinação do módulo de elasticidade. Entretanto, os bons resultados apresentados pelos gráficos das Figuras 9 e 10, e o baixíssimo custo dos eletrodutos, facilmente encontrados em casas de materiais de construção, sugerem uma atividade experimental que busque apenas determinar a relação entre o comprimento de um tubo metálico e suas frequências de ressonância. Pode-se apresentar aos grupos de alunos a proposta de construir um sino dos ventos com frequências especificadas, ou ainda um instrumento musical constituído por tubos pendurados por um dos nós do primeiro harmônico. A atividade também pode ser estendida para estudantes do Ensino médio, valorizando-se o aspecto qualitativo e os conceitos de interferência, onda estacionária e ressonância. Também pode ser proposto para estes a construção de um sino dos ventos, sem a necessidade de se fixar as frequências, inclusive explorando outros materiais, como o bambu seco. O professor também poderá iniciar a atividade apresentando três sinos dos ventos, sendo que um não ressoa adequadamente porque os furos de suspensão foram propositalmente feitos onde não se encontram os nós, e questionar por que este sino está defeituoso, ou com tubos de mesmo comprimento, e perguntar por que está monótono.

### 4. Conclusão

Os resultados se mostraram muito precisos para os fins didáticos que se propôs o presente artigo, mesmo porque, não se teve a pretensão de obter valores do módulo de elasticidade com a precisão suficiente para servirem como referência. Não se conseguiu obter o terceiro harmônico para as hastes maciças de aço. Suspeita-se

que a alta densidade e as dimensões das hastes dificultaram a aquisição e que, acaso se dispusesse de hastes mais longas, seriam obtidos. A proposta também pode ser adaptada analisando-se apenas como as frequências dos harmônicos estão relacionadas com o comprimento dos tubos metálicos, enveredando para um viés da física da música. Levada ao Ensino Médio, a prática promoverá de forma lúdica a compreensão dos conceitos básicos de ondulatória, desenvolvendo a percepção auditiva dos estudantes e promovendo a execução de pequenos projetos de pesquisa.

Com isso, o telefone celular gradativamente deixa de ser visto como o vilão importuno para se converter em poderoso aliado no processo de ensino. É versátil, os jovens manuseiam o aparelho com facilidade e boa vontade, permitindo uma ponte entre a representação tradicional, envolvendo gráficos e equações, com a linguagem do ambiente eletrônico que estão familiarizados. Usou-se o aplicativo *Spectroid*, gratuito, de fácil instalação e manuseio, mas nada impede que seja usado outro. Considerou-se que a frequência de ressonância fosse aquela onde a curva do nível de intensidade sonora em função da frequência apresentasse o valor máximo, mas a rigor, os gráficos mostram um pequeno intervalo de valores no espectro ao redor dos picos e ruídos de fundo, que não comprometeram o trabalho.

Uma vez que os tarugos e os dutos foram pinçados no local onde ocorriam os nós, e foram excitados transversalmente, apenas os harmônicos das ondas estacionárias transversais foram observados. Entretanto, também seria possível tangê-los longitudinalmente, enquanto fossem pinçados no local onde estivessem os nodos das ondas longitudinais. A localização destes nodos demandaria uma nova análise física do problema e um novo conjunto de equações, sendo muita informação para uma única prática de laboratório didático. Então, optou-se por apresentar o estudo das ondas estacionárias longitudinais nas hastes em um trabalho futuro.

Dessa forma, o objetivo central do trabalho, apresentar uma prática que permitisse a obtenção do módulo de elasticidade com procedimentos muito simples, foi atingido. Soma-se a isto que a atividade se mostrou válida em vários contextos. No processo ensino-aprendizagem, a ondulatória ganha mais um conjunto de elementos sinestésicos que fornecem estruturas e imagens concretas para o posterior raciocínio abstrato que exige a Mecânica Quântica. Envolvendo elementos da música, o aspecto lúdico da prática incentiva sua execução e facilita o aprendizado, inclusive para portadores de deficiência auditiva. Os procedimentos experimentais são bastante simples de serem executados tanto na perspectiva de aquisição do aparato e dos materiais necessários para o ensaio, quanto ao procedimento de tomada de dados. O baixo custo e ampla disponibilidade dos instrumentos de medida também corroboram com a aplicabilidade deste procedimento experimental.

## Referências

- [1] M. Motosaka e K. Mitsuji, *Soils and Foundations* **52**, 929 (2012).
- [2] M.H. Mezzomo e A.G. de Moraes, *Rev. Mater.* **25**, 1 (2020).
- [3] W.J. Bottega, *Engineering Vibrations* (Taylor & Francis Group, Boca Raton, 2006).
- [4] S.G. Kelly, *Mechanical Vibrations: Theory and Applications* (Cengage Learning, Stamford, 2012).
- [5] M. Royvaran, O. Avcı e B. Davis, *J. Constr. Steel Res.* **164**, 105764 (2020).
- [6] D.E. Allen, *Concr. Int.* **12**, 66 (1990).
- [7] K. Lee, S.H. Lee, G.C. Kim e S.S. Woo, *J. Constr. Steel Res.* **92**, 164 (2014).
- [8] A.M. Müller, *Análise do comportamento do aço ca-60 para estruturas de concreto armado em situação de incêndio*. Trabalho de Conclusão de Curso, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba (2018).
- [9] W.D. Callister Jr., *Ciência e Engenharia de Materiais – Uma Introdução* (LTC, Rio de Janeiro, 2012), 8ª ed.
- [10] F. Catelli e G.A. Mussato, *Rev. Bras. Ensino Fis.* **36**, 6 (2014).
- [11] X. Yang, F. Qian, G. Zou, M. Li, J. Lu, Y. Li e M. Bao, *Appl. Catal. B Environ.* **193**, 22 (2016).
- [12] R. Hessel, A.A. Freschi, E.C. Rosado e L.A. Barreiro, *Rev. Bras. Ensino Fis.* **38**, 10 (2016).
- [13] P.F. Castro, *Polímeros* **7**, 58 (1997).
- [14] J. Pacheco, P. Bilesky, T.R. Morais, F. Grando e P. Helene, em: *Anais do 56º Congresso Brasileiro do Concreto* (Natal, 2014).
- [15] H.M. Nussenzveig, *Curso de Física Básica: Mecânica* (Editora Blucher, São Paulo, 2013), 5ª ed.
- [16] H.M. Nussenzveig, *Curso de Física Básica: Fluidos, Oscilações e Calor* (Editora Blucher, São Paulo, 2014), 5ª ed.
- [17] Y. Krutii, M. Suriyaninov e V. Vandynskyi, *MATEC Web of Conferences* **116**, 1 (2017).
- [18] K.R. Symon, *Mecânica* (Editora Campus, Rio de Janeiro, 1996).
- [19] R.L. Viana, *Rev. Bras. Ensino Fis.* **33**, 3304 (2011).
- [20] G.T. Azevedo, E.C. Romão e C.R. Menegatti, *Rev. Bras. Ensino Fis.* **41**, 3 (2019).
- [21] C.A. Gomes e E. Lüdke, *Rev. Bras. Ensino Fis.* **33**, 3501 (2011).
- [22] R.D.L. Rodrigues, *Rev. Bras. Ensino Fis.* **19**, 68 (1997).
- [23] P.C.M. Machado e F.A.P. Osorio, *Rev. Bras. Ensino Fis.* **19**, 102 (1997).
- [24] A. Kandus, F.W. Gutmann e C.M.C. Castilho, *Rev. Bras. Ensino Fis.* **28**, 427 (2006).
- [25] J.P. Donoso, A. Tannús, F. Guimarães e T.C. Freitas, *Rev. Bras. Ensino Fis.* **30**, 2305 (2008).
- [26] E.M. Santos, C. Molina e A.P.B. Tufaile, *Rev. Bras. Ensino Fis.* **35**, 2507 (2013).
- [27] R.S. Santos, P.S. Camargo Filho e Z.F.D.C. Rocha, *Rev. Bras. Ensino Fis.* **40**, e2602 (2017).
- [28] R.S.B. Silva, *O Tubo de Rubens Como Recurso Didático no Ensino de Ondas*. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Mato Grosso, Barra do Garças (2016).

- [29] D.C. Pizetta, A.B. Wanderley, V.R. Mastelaro e F.F. Paiva, *Rev. Bras. Ensino Fis.* **39**, e3301 (2017).
- [30] A.R. Souza e C.E. Aguiar, em: *XII Encontro Pesquisa em Ensino Física* (Águas de Lindóia, 2010).
- [31] C.E. Laburú e O.H.M. Silva, *Investig. Em Ensino Ciências* **16**, 7 (2011).
- [32] S. Ainsworth, *Comput. Educ.* **33**, 131 (1999).
- [33] C.E. Laburú, M.A. Barros e O.H.M. Silva, *Ciência Educ.* **17**, 469 (2011).
- [34] S. Ainsworth, V. Prain e R. Tytler, *Science* **333**, 1096 (2011).
- [35] V.R. Werneck, *Ens. Avaliação e Políticas Públicas Em Educ.* **14**, 173 (2006).
- [36] S.E. Souza, *Arq. Mudi.* **11**, 110 (2007).
- [37] A.S. Ribas, S.C.R. Silva e J.R. Galvão, *Telefone Celular Como Recurso Didático no Ensino de Física* (Editora UTFPR, Curitiba, 2015).
- [38] M.R. Rossini, M.J. Alves, L.H. Amorin e P.S. Camargo Filho, *Rev. Bras. Ensino Fis.* **42**, e20200290 (2020).
- [39] L. Sukariasih, Erniwati, L. Sahara, L. Hariroh e S. Fayanto, *Int. J. Sci. Technol. Res.* **8**, 862 (2019).
- [40] J. Kuhn e P. Vogt, *Front. Sensors.* **1**, 67 (2013).
- [41] F.P. Beer, J.E.R. Johnston, J.T. DeWolf e D.F. Mazurek, *Mecânica dos Materiais* (AMGH, Porto Alegre, 2011), 5ª ed.
- [42] D.J. Griffiths, *Mecânica Quântica* (Pearson Prentice Hall, São Paulo, 2011), 2ª ed.
- [43] H.D. Young e R.A. Freedman, *Física II: Termodinâmica e Ondas* (Pearson, São Paulo, 2015), 12ª ed.
- [44] R. Halliday, *Fundamentos de Física 2 – Gravitação, Ondas, Termodinâmica* (LTC, Rio de Janeiro, 2012), 9ª ed.
- [45] P.A. Tipler e G. Mosca, *Física para Cientistas e Engenheiros* (LTC, Rio de Janeiro, 2019), 6ª ed.
- [46] B. Balakumar e E.B. Magrab, *Vibrations* (Cengage Learning, Toronto, 2009), 2ª ed.
- [47] R. Reis, P.H.E. Ito, S.E.S. Felício e F.F. Paiva, *Rev. Bras. Ensino Fis.* **40**, e5405 (2018).
- [48] A.M.S. Breitschaft e V.C. Barbosa, *Rev. Bras. Ensino Fis.* **36**, 2314 (2014).
- [49] W.E. Boyce, R.C. Diprima e D.B. Meade, *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno* (LTC, Rio de Janeiro, 2020), 11ª ed.
- [50] D.A.R. Justo, E. Sauter, F.S. Azevedo, L.F. Guidi e P.H.A. Konzen, *Cálculo Numérico Um Livro Colaborativo Versão Scilab*, disponível em: <http://www.mat.ufrgs.br/~guidi/grad/MAT01169/livro-sci.pdf>, acessado 09/11/2020.
- [51] N.M.B. Franco, *Cálculo Numérico* (Pearson Prentice Hall, São Paulo, 2006), 1ª ed.
- [52] D.P.A. Microphones, *How to Read Microphone Specifications*, disponível em: <https://www.dpamicrophones.com/mic-university/how-to-read-microphone-specifications>, acessado em 11/11/2020.
- [53] R.C. Hibbeler, *Resistência dos materiais* (Pearson, São Paulo, 2012), 7ª ed.