

MOND: uma alternativa à mecânica newtoniana

(MOND: an alternative to Newtonian mechanics)

H.E.S. Velten¹

Departamento de Física, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, ES, Brasil

Recebido em 10/4/2008; Aceito em 12/6/2008; Publicado em 8/10/2008

O objetivo do presente trabalho é expor os principais aspectos e resultados de uma das mais populares alternativas à teoria newtoniana para o movimento dos corpos conhecida por Modified Newtonian Dynamics (MOND, na sigla em inglês). Para exemplificar um dos sucessos dessa modificação na teoria newtoniana, estudo a dinâmica da curva de rotação de galáxias com a teoria newtoniana e com a teoria MOND e confronto os resultados teóricos contra os dados observacionais da galáxia UGC4329 pertencente ao aglomerado de Câncer.

Palavras-chave: mecânica newtoniana, MOND, mecânica modificada.

The purpose of the present work is to describe the more important aspects and results of one of the most popular alternatives to the Newtonian theory of motion: the MOND theory. In order to explain one of the success of this theory I study the curve rotation of galaxies with Newtonian theory and MOND theory. The results obtained are confronted against the observational data from galaxy UGC4329 from Cancer cluster.

Keywords: Newtonian mechanics, MOND, modified mechanics.

1. Introdução

A sigla MOND (do inglês *Modified Newtonian Dynamics*) é melhor traduzida para o português como dinâmica newtoniana modificada. Trata-se de uma proposta introduzida por Mordehai Milgrom na década de oitenta com o objetivo de explicar a dinâmica de sistemas gravitacionais, que até então não era explicada somente pela teoria newtoniana [1]. Isto porque, quando observamos a curva de rotação de galáxias [2] e as altas velocidades nos aglomerados de galáxias [3] verificamos que é necessária uma quantidade de massa maior do que aquela observada para explicar a dinâmica desses sistemas. Este é o problema da matéria escura, ou seja, uma certa quantidade de matéria, não bariônica e que ainda não foi detectada nos laboratórios ou pelos modernos aceleradores de partículas, deve supostamente existir em certos sistemas astronômicos para que a teoria newtoniana satisfaça as observações. O que é importante salientar é que uma das principais dificuldades desta interpretação é o fato de não conhecermos qual tipo de partículas fundamentais constituem a matéria escura.

Outra observação que deve ser satisfeita é o processo de formação de estruturas cósmicas como galáxias e aglomerados de galáxias. A relatividade geral, que é a teoria padrão para a gravitação, não consegue explicar, sozinha, a velocidade com que crescem as aglomerações

primordiais de matéria que resultaram nas galáxias e aglomerados de galáxias que observamos hoje. Esta questão só é resolvida quando admitimos a existência de matéria escura ainda nas fases anteriores ao início do processo de aglomeração de matéria. Isto aceleraria o processo de aglomeração de massa e somente dessa forma haveriam condições apropriadas para que estas estruturas se formem em um tempo compatível com o que conhecemos para a idade do universo. Para se ter uma idéia, o modelo cosmológico conhecido como Λ CDM, que fornece os melhores resultados de acordo com as observações, prediz que aproximadamente 22% de todo o universo é composto por matéria escura, enquanto que, a quantidade de matéria bariônica representa apenas 4% do universo. Para uma revisão sobre o problema da matéria escura em cosmologia e astrofísica consultar a Ref. [4].

Desde que foi proposta a teoria MOND tem sido aplicada e testada em galáxias, grupos de galáxias e aglomerados de galáxias fornecendo resultados que indicam a não existência da matéria escura, ou pelo menos, a necessidade de uma quantidade menor desta desconhecida componente do universo [5]. Esta idéia de se modificar as conhecidas teorias da gravitação não se limita ao nível clássico. Recentemente, J. Bekenstein propôs uma teoria covariante que além da métrica gravitacional (que é um campo tensorial) possui um campo

¹E-mail: manovelten@yahoo.com.br.

escalar e outro vetorial [6]. Por este motivo sua teoria ficou conhecida por TeVeS.² Assim como a teoria MOND é uma modificação da teoria newtoniana, a teoria TeVeS é uma modificação da lei da gravitação relativística que possui a teoria MOND como um limite clássico. Alguns resultados sobre a utilização da teoria TeVeS podem ser encontrados na Ref. [7].

Na próxima seção, discuto o problema da curva de rotação de galáxias. Esta questão é um dos principais indicadores da existência da matéria escura. Na terceira seção, apresento as modificações propostas pela teoria MOND e seus sucessos na descrição de algumas observações astronômicas. Além disso aplico os resultados das seções 2 e 3 contra os dados observacionais da galáxia UGC4329. A última seção é destinada aos comentários finais sobre a teoria MOND e algumas das atuais perspectivas para esta teoria tanto em nível astrofísico quanto cosmológico.

2. Onde a mecânica newtoniana falha?

O sucesso da mecânica newtoniana, como teoria fundamental para o movimento dos corpos, coloca o conjunto de leis conhecidas como leis de Newton como um dos pilares da física clássica. Apesar disso, conhecemos algumas de suas limitações quando estamos interessados em fenômenos que vão além das típicas escalas de distância e velocidade que estamos acostumados em nosso dia a dia. Estas fronteiras da teoria newtoniana começaram a ficar evidentes já no início do século XX. A primeira limitação da mecânica newtoniana surge quando passamos a tratar com objetos que possuem velocidades comparáveis com a velocidade da luz c .³ É neste contexto que se dá o advento da relatividade especial. Uma vez que tratamos com objetos nestes limites de velocidade, a teoria newtoniana necessita de algumas correções para prever os fenômenos físicos. O resultado imposto pela relatividade restrita é que as quantidades dinâmicas dos corpos é alterada pelo chamado fator de Lorentz $\gamma = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$. Os efeitos relativísticos se tornam tão mais evidentes quanto maior é o valor da fração v/c , o que distancia o valor de γ da unidade. A segunda limitação da teoria newtoniana é percebida somente quando estudamos fenômenos físicos em escalas de comprimento da ordem do tamanho de elétrons, prótons e neutrons. Estamos falando em escalas inferiores à 10^{-8} m. A lei física fundamental neste regime é a mecânica quântica, formulada por físicos como Heisenberg, Dirac e Pauli também no começo do século XX. Na mecânica quântica conceitos como posição, trajetória e energia estão atrelados a uma forte interpretação estatística de objetos como operadores quânticos e funções de onda, todos relacio-

nados pela equação básica da mecânica quântica que é a equação de Schrödinger. Além do que, passamos a tratar com valores discretos e não mais contínuos, para a energia das partículas. Resumidamente, temos que, perante este cenário, podemos dizer que a teoria newtoniana é uma teoria limite das teorias relativista e quântica, quando nos afastamos do “muito rápido” e do “muito pequeno”, respectivamente.

Se o objetivo de um estudo é o movimento de corpos celestes orbitando ao redor do centro de uma galáxia ou aglomerado de galáxias, não nos preocuparíamos em conhecer as ferramentas da mecânica quântica para resolver tal problema. Isto porque objetos como estrelas e galáxias claramente não compreendem o que chamamos de pequeno. Podemos utilizar a relatividade especial neste caso, mas antes devemos estimar a ordem de grandeza da correção imposta pela relatividade, o fator γ . Vamos tomar como exemplo a velocidade típica de uma galáxia pertencente ao aglomerado de galáxias de COMA.⁴ Para uma típica galáxia neste aglomerado com velocidade $v \sim 7000$ km/s, o fator de Lorentz $\gamma = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ é da ordem de $\gamma \sim 0,9997$. Assim, a correção relativística é de apenas 0,03%. Este resultado indica que, por mais exata que seja a abordagem relativística, ainda podemos utilizar a teoria newtoniana como ferramenta para este problema com uma boa margem de certeza.

Vamos tomar como exemplo o problema da curva de rotação de galáxias. A análise de um sistema como uma galáxia pode ser simplificada se modelarmos uma galáxia como uma distribuição esfericamente simétrica de massa de raio R , com densidade constante e igual a ρ , assim como na Fig. 1.

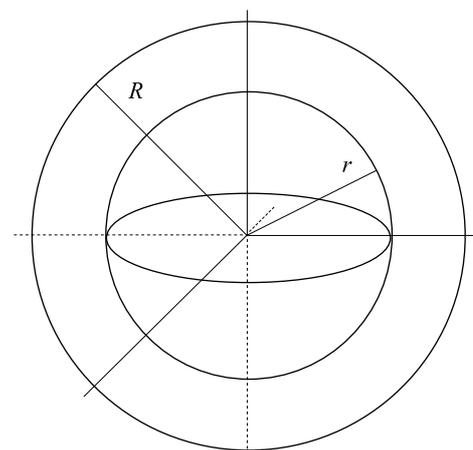


Figura 1 - Representação esfericamente simétrica para uma galáxia de raio R .

Para obter a velocidade com que um corpo orbita nesta galáxia devemos considerar, distintamente, a região interior ao raio R em relação a região exterior.

²Do inglês Tensorial (T), Vectorial (V) e Scalar (S).

³O valor mais preciso que conhecemos para a velocidade da luz é $c = 299.729.458$ m/s.

⁴Estudando este aglomerado de galáxias Fritz Zwicky descobriu as altas velocidades das galáxias na década de trinta.

2.1. Região $r < R$

Seja um corpo de prova de massa m' situado a uma distância r do centro da galáxia de raio R cuja densidade é constante e igual a ρ . A simetria esférica desta galáxia nos permite escrever a massa interior ao raio r como $m = \rho \frac{4\pi}{3} r^3$. Dessa forma, a força gravitacional experimentada pelo corpo de prova é devida, unicamente, à atração gravitacional exercida pela massa m , interior ao raio r . Isto porque é possível demonstrar que a contribuição gravitacional líquida, sobre o corpo de prova, proveniente de toda massa entre os raios r e R é nula. Este é um resultado obtido a partir do “teorema de Newton” [8]. Assim, como a única força experimentada pela massa m' é a atração gravitacional devido a massa m , interior ao raio r , temos que

$$\frac{Gmm'}{r^2} = \frac{m'v_{ni}^2}{r}, \quad (1)$$

onde v_{ni} é a velocidade do corpo de massa m' . Como a densidade da galáxia é constante existe uma relação entre a massa m e a massa total da galáxia M , dada por $m = Mr^3/R^3$. Substituindo esta relação na igualdade acima temos

$$v_{ni} = \sqrt{\frac{GM}{R^3}} r. \quad (2)$$

Com este resultado, vemos que a velocidade de rotação de um corpo na região $r < R$ cresce linearmente conforme a distância ao centro da galáxia r .

2.2. Região $r > R$

Na região exterior à galáxia, situação onde o corpo de massa m' está a uma distância $r > R$, podemos considerar que toda a massa M da galáxia está concentrada em seu centro. Assim, a força gravitacional exercida pela galáxia sobre o corpo de massa m' é igualada à força centrípeta no corpo. Então

$$\frac{GMm'}{r^2} = m' \frac{v_{ne}^2}{r}. \quad (3)$$

Como assumimos a igualdade entre massa inercial e massa gravitacional na equação acima, a expressão resultante para a velocidade do corpo é

$$v_{ne} = \sqrt{\frac{GM}{r}}. \quad (4)$$

Dessa forma, podemos perceber que segundo a teoria newtoniana a velocidade do corpo que orbita na região $r > R$ diminui a medida com que ele se afasta do centro da galáxia. Na fronteira da galáxia, quando $r = R$, as duas expressões para a velocidade do corpo fornecem o mesmo valor $v_{ni} = v_{ne} = \sqrt{\frac{GM}{R}}$ como é de se esperar.

3. Dinâmica modificada

A existência de matéria escura é proposta com o objetivo de explicar anomalias observadas na dinâmica de galáxias e aglomerados de galáxias. Uma das alternativas à matéria escura é admitir que as leis fundamentais da física não são as usuais em todas as escalas da natureza. Dessa forma, o que sustenta a idéia de uma dinâmica modificada como a teoria MOND é: assim como a mecânica quântica surge quando a escala de distância fica muito pequena e a relatividade restrita passa a ser a lei física para a dinâmica de corpos em escalas de velocidades comparáveis a da luz, a proposta da teoria MOND é que ela passaria a reger o movimento de corpos em escalas de aceleração extremamente pequenas. Basicamente, a teoria MOND é uma modificação da segunda lei de Newton, de tal forma que esta, para um corpo de prova de massa m' , passa a ser escrita como

$$F = m' \mu \left(\frac{a}{a_0} \right) a, \quad (5)$$

onde $\mu(x)$ é uma função que assume a seguinte forma: $\mu(x) \approx 1$ para $x \gg 1$ e $\mu(x) \approx x$ para $x \ll 1$. Existem na literatura várias formas para a função $\mu(x)$ [9], entretanto as implicações causadas pela teoria MOND não dependem de uma forma exata para esta função. Nesta modificação, $a_0 \sim 10^{-8} \text{ cm s}^{-2}$ define o valor para a aceleração crítica da teoria. Para um corpo em movimento com uma aceleração abaixo deste valor a segunda lei de Newton usual não seria mais válida. A princípio, o valor estabelecido pela constante a_0 parece ser tão pequeno que talvez não existam situações física em que corpos possuam esta aceleração. No entanto, justamente em sistemas como galáxia e aglomerados de galáxias verificamos acelerações desta ordem. Com isso a segunda lei de Newton para uma partícula no regime MOND assume a forma

$$F = m' \frac{a^2}{a_0}. \quad (6)$$

A relação entre força e aceleração, não é mais linear, como no caso Newtoniano mas o campo gravitacional ainda continua sendo derivado a partir do potencial gravitacional $\mathbf{g} = -\nabla V$. No entanto, a equação de Poisson que associa a distribuição de massa ρ com o campo gravitacional é modificada,

$$\nabla \left[\mu \left(\frac{g}{a_0} \right) \mathbf{g} \right] = -4\pi G\rho. \quad (7)$$

Na equação acima podemos notar que quando $\mu(x) = 1$ recuperamos a equação de Poisson original.

O valor de a_0 determina quando ocorre a transição do regime Newtoniano para o regime MOND. Um exemplo disso são galáxias com alta densidade nas regiões em torno de seu centro. Estas galáxias, aparentemente, não possuem matéria escura em suas regiões

mais internas pois os dados observacionais satisfazem a teoria newtoniana nessa região. Como consequência dessa alta densidade central, as acelerações típicas de estrelas na região próxima ao centro galáctico é superior à a_0 . Contudo, a densidade destas galáxias vai ficando menor a medida que nos afastamos de seu centro. Com isso, passamos a observar que somente a mecânica newtoniana já não descreve mais a dinâmica na região de menor densidade da galáxia (longe do centro), uma vez que seria necessário o acréscimo de matéria escura nas regiões mais externas. Curiosamente, objetos nestas regiões menos densas estão sujeitos a acelerações da ordem, ou menores que, a_0 , ou seja, a dinâmica destes objetos já está completamente inserida no regime MOND. Dessa forma, para a região mais externa, menos densa, ficamos com duas alternativas: ou utilizamos a teoria newtoniana juntamente com o acréscimo de matéria escura ou utilizamos apenas a teoria MOND.

Vamos tratar do problema da curva de rotação de galáxias, mas agora através da teoria MOND. Para isso vamos considerar que todos os corpos destas galáxia possuem uma aceleração menor que a_0 , ou seja, toda a dinâmica da galáxia pertence ao regime MOND. Assim como feito na seção anterior, podemos classificar estrelas pertencentes a uma galáxia como situadas na região interior ao raio da galáxia R ou na região exterior.

3.1. Região $r < R$

Devemos ter em mente que a lei fundamental para a dinâmica das estrelas passa a ser a Eq. (6). A teoria MOND implica em uma modificação na lei da dinâmica e não modifica os demais conceitos cinemáticos, como por exemplo o de aceleração centrípeta. Com isso, basta substituir o lado direito da Eq. (1) pela Eq. (6) e levar em conta também que a massa total no interior do raio r , relaciona-se com a massa total da galáxia através de $m = Mr^3/R^3$. Como resultado temos que a velocidade da órbita de uma estrela na região $r < R$ é

$$v_{mi} = \left(\frac{GMa_0r^3}{R^3} \right)^{\frac{1}{4}}. \quad (8)$$

A velocidade das estrelas é, assim como no caso newtoniano, uma função crescente em função do raio da galáxia, no entanto proporcional a potência $r^{3/4}$.

3.2. Região $r > R$

Para uma estrela orbitando a região externa da galáxia, novamente podemos considerar que toda a massa da galáxia pode ser concentrada na origem. Com isso, basta substituir o lado direito da igualdade (3) pela lei de força predita pela teoria MOND. O resultado desta operação é

$$v_{me} = (GMa_0)^{\frac{1}{4}}. \quad (9)$$

Sobre o resultado acima observamos que a velocidade para estrelas que orbitam a região externa da galáxia

não depende da distância, caracterizando um comportamento assintótico plano para a curva de rotação de galáxias, uma vez que G , M e a_0 são constantes. Este resultado é justamente o comportamento observado em galáxias e aglomerados de galáxias. Quando confrontada contra os dados observacionais de galáxias a Eq. (9) mostra que a teoria MOND explica muito bem o comportamento da curva de rotação. Para visualizar melhor estes resultados recomendamos fortemente ao leitor as Refs. [10, 11].

Este resultado também está de acordo com a relação de Tully-Fisher [12]. Segundo esta relação galáxias mais luminosas têm, em média, maiores velocidades de rotação, significando que são mais massivas. De acordo com esta relação a luminosidade cresce com a velocidade de rotação numa proporção

$$L \propto v^4. \quad (10)$$

Fazendo a associação direta entre a massa de uma galáxia e sua luminosidade, podemos perceber que a relação de Tully-Fisher, expressa na Eq. (10), mantém a mesma proporcionalidade que a equação para a velocidade na teoria MOND.

Para ilustrar o problema da curva de rotação de galáxias, vamos aplicar o modelo descrito acima em uma galáxia específica. As expressões para a velocidade de rotação podem ser testadas contra os dados observacionais assim como na figura abaixo, onde tomamos como exemplo a galáxia UGC4329 situada no aglomerado de Câncer.

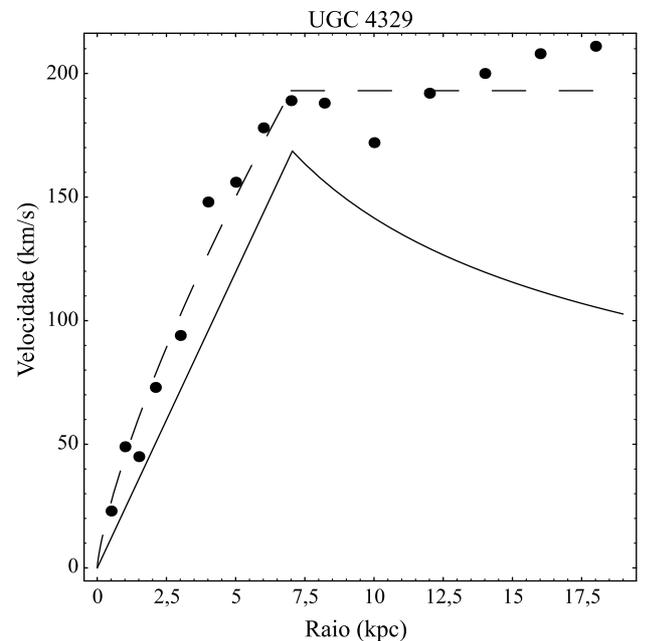


Figura 2 - Curva de rotação para a galáxia UGC4329. A teoria MOND (linha tracejada) e a teoria newtoniana (linha sólida) são comparadas com os dados observacionais (pontos).

Os dados sobre a massa, o raio e os valores observados para a curva de rotação desta galáxia podem ser encontrados na Ref. [2]. Na figura acima, o ponto onde

as curvas de rotação traçadas apresentam uma mudança no comportamento indicam o raio da galáxia $R \sim 7$ kpc.

O modelo simplificado para uma galáxia mostrado na Fig. 1 é apenas uma aproximação para um configuração esfericamente simétrica. Galáxias reais apresentam morfologias bastante distintas e podem ser classificadas segundo a divisão de Hubble [13]. Entretanto, mesmo apesar da aproximação do modelo utilizado na segunda seção pode-se verificar, através da Fig. 2, que a teoria MOND (linha tracejada) apresenta uma melhor descrição qualitativa para a curva de rotação do que a teoria newtoniana (linha sólida). Se observarmos as Eqs. (2) e (4) vemos que quanto maior a massa da galáxia sempre será maior a velocidade de rotação. Ao mesmo tempo observamos que os valores teóricos para a velocidade newtoniana são inferiores aos dados observacionais na Fig. 2. Com isso, se supormos a existência de uma distribuição de massa, não observável, na região interna e principalmente na região externa da galáxia, teríamos maiores valores previstos para a velocidade newtoniana fazendo com que a curva sólida da Fig. 2 se adeque melhor aos dados observacionais. Ou seja, precisamos supor a existência de uma certa quantidade de matéria nesta galáxia que não conseguimos observar: matéria escura.

4. Comentários finais

As observações astronômicas de galáxias e aglomerados indicam que parte desses objetos é constituída por algum tipo de matéria que não pode ser detectada diretamente, ou seja, não emite nenhum tipo de radiação eletromagnética. Devido a este fato dá-se à essa matéria o nome de matéria escura. Um dos obstáculos desta interpretação é que não sabemos quais partículas fundamentais constituem esse tipo de matéria. Apesar de que a física de partículas possui alguns candidatos teóricos para uma possível “partícula escura”, os laboratórios e os modernos aceleradores de partículas ainda não a detectaram. Justamente este fato motiva uma modificação da teoria newtoniana. Nesse sentido, a teoria MOND foi proposta primeiramente com o objetivo de resolver o problema da curva de rotação de galáxias, mas posteriormente apresentou resultados que explicaram características físicas de diversos sistemas astronômicos sem matéria escura.

Através de um modelo simplificado para uma galáxia o problema da curva de rotação, segundo a teoria newtoniana e a teoria MOND, foi tratado nas seções 2 e 3, respectivamente. Observamos que a curva de rotação predita pela teoria MOND concorda com o comportamento qualitativo dos dados observacionais enquanto que a teoria newtoniana falha, principalmente na região $r > R$. Assim, surge a opção de modificar a dinâmica e não necessariamente inserir, de maneira fenomenológica, matéria escura em galáxias. Nos últimos anos, a teoria MOND foi testada em diversos sistemas

astronômicos e demonstrado grande sucesso.

Ainda assim, em nível cosmológico, a matéria escura possui um papel fundamental no processo de formação das estruturas cósmicas. Uma teoria como a MOND e mesmo uma formulação covariante mais fundamental como a teoria TeVeS devem ainda explicar como as estruturas se formam em um universo sem matéria escura. Esta questão ainda é um ponto em aberto para um universo puramente bariônico.

Em um futuro próximo é possível que a matéria escura seja detectada em aceleradores de partículas, como por exemplo o LHC (Large Hadron Collider) [14]. Assim, se constatada a existência da matéria escura, qualquer teoria ou modelo físico deverá, inevitavelmente, levar em conta os efeitos gravitacionais produzidos por esta nova componente.

Agradecimentos

Gostaria de agradecer ao CNPq pelo apoio financeiro, ao professor Júlio Fabris e aos colegas do PPGFIS-UFES pelos debates e discussões sobre este tema.

Referências

- [1] M. Milgrom, *Astrophys. J.* **270**, 365 (1983); *Astrophys. J.* **270**, 371 (1983); *Astrophys. J.* **270**, 384 (1983).
- [2] V.C. Rubin, N. Thonnard and W.K. Ford, Jr., *Astrophys. J.* **225**, L107 (1978).
- [3] F. Zwicky, *Astrophys. J.* **86**, 217 (1937).
- [4] D.W. Sciama, *Proc. R. Soc. Lond.* **A 394**, 1 (1984); A. Del Popolo, *Astronomy Reports*, **51**, 3 (2007); S. Fiorucci, arXiv:astro-ph/0406285 (2004).
- [5] R.H. Sanders, arXiv:0712.2576 (2004); O. Tiret and F. Combes, arXiv:0712.1459 (2007); C. Nipoti, P. Londrillo and L. Ciotti, arXiv:0705.4633 (2007).
- [6] J.D. Bekenstein, *Physical Review* **D70**, 083509 (2004).
- [7] S. Dodelson and M. Liguori, arXiv:astro-ph/0608602 v1 (2006).
- [8] J.B. Marion and S. Thornton, *Classical Dynamics of Particles and Systems* (Saunders College Publishing, Virginia, 2004).
- [9] M. Milgrom, *New Astron.Rev.* **46**, 741-753 (2002).
- [10] R.H. Sanders and E. Noordermeer, arXiv:astro-ph/0703352v1 (2007).
- [11] M. Milgrom and R.H. Sanders, arXiv:astro-ph/0611494v1 (2006).
- [12] K.S. Oliveira Filho e M.F. Oliveira Saraiva, *Astronomia & Astrofísica* (Editora Livraria da Física, São Paulo, 2004).
- [13] J. Binney and S. Tremaine, *Galactic Dynamics* (Princeton University Press, New Jersey, 1987).
- [14] Maiores informações podem ser encontradas na página oficial do LHC: www.cern.ch/LHC/.