Revista Brasileira de Ensino de Física, vol. 44, e20210384 (2022)
www.scielo.br/rbef
DOI: https://doi.org/10.1590/1806-9126-RBEF-2021-0384

Teoria da medida, decoerência e a interpretação de Montevidéu da mecânica quântica

Theory of measurement, decoherence and the Montevideo interpretation of quantum mechanics

Alan M. Velásquez-Toribio*[1]

[1]Universidade Federal do Espirito Santo, Núcleo Cosmo-Ufes, 29075-910, Vitória, ES, Brasil.

Recebido em 30 de outubro de 2021. Revisado em 26 de março de 2022. Aceito em 05 de maio de 2022.

Revisamos brevemente a teoria da medida na mecânica quântica e também o desenvolvimento da teoria da decoerência. Apresentamos a teoria da decoerência usando um sistema simples, de dois níveis, para ilustrar algumas de suas principais implicações e limitações como solução à teoria da medida. Depois apresentamos uma nova interpretação da mecânica quântica denominada interpretação de Montevidéu, baseada na introdução de relógios realistas na evolução de um sistema quântico. A interpretação de Montevidéu estabelece o conceito de indecidibilidade que permite definir um evento. Em geral, a interpretação de Montevidéu se enquadra na interpretação relacional da mecânica quântica que interpreta o valor de uma dada grandeza em conexão com as variações dos valores das outras grandezas. Esperamos que esta apresentação possa introduzir os estudantes de física nos temas atuais sobre a teoria da medida.
Palavras-chave: Mecânica quântica, teoria da medida, decoerência, interpretação de Montevidéu.

We briefly review measurement theory in quantum mechanics and also the development of decoherence theory. We present decoherence theory using a simple two-level system to illustrate some of its main implications and limitations as a solution to measurement theory. Next, we present a new interpretation of quantum mechanics called the Montevideo interpretation, based on the introduction of realistic clocks in the evolution of a quantum system. The Montevideo interpretation establishes the concept of undecidability that allows defining an event. In general, the Montevideo interpretation fits the relational interpretation of quantum mechanics, which interprets the value of a given quantity in connection with variations in the values of other quantities. We hope that this presentation will introduce physics students to current issues in measurement theory.
Keywords: Quantum mechanics, theory of measurement, decoherence, the Montevideo interpretation.

1. Introdução

Mecânica quântica é a teoria da física de maior sucesso observacional, pois suas múltiplas previsões têm sido comprovadas inúmeras vezes e nos mais diversos sistemas. Por exemplo, desde a completa explanação das linhas espectrais do átomo de hidrogênio até sistemas complexos como isótopos de hélio (^3He) que se agrupam para formar um estado superfluido [1].

No entanto, desde seus inícios a mecânica quântica foi objeto de fortes polêmicas. Por exemplo, podemos mencionar o debate entre Einstein e Bohr no quinto congresso de Solvay [2]. Einstein, neste congresso, critica à mecânica quântica em diversos aspectos usando diferentes propostas de experimentos mentais como, por exemplo, o experimento de duas fendas, onde utiliza as leis da conservação da energia e do momento para tentar determinar simultaneamente propriedades de observáveis que não-comutam. Em geral, Einstein vai insistir em tentar mostrar que a teoria quântica é incompleta. Por outro lado, Bohr vai publicar seu princípio de complementariedade para poder justificar uma conexão entre a mecânica quântica e a mecânica clássica [2]. Esta conexão é uma questão fundamental, pois se aceitamos que a mecânica quântica é a teoria fundamental dos constituintes dos objetos macroscópicos, então suas leis deveriam ser as bases das leis macroscópicas.

Por outro lado, Schrödinger, mediante um experimento imaginário, estuda uma das propriedades mais importantes da mecânica quântica: a superposição de estados quânticos. Este experimento é atualmente chamado de gato de Schrödinger.[1]

Adicionalmente, Einstein em colaboração com Podosky e Rosen publicaram o chamado paradoxo EPR, onde introduzem o conceito de emaranhamento ou entrelaçamento quântico. Este fenômeno pode se pensar como um elo ou conexão que as partículas (ou um conjunto de partículas) mantém entre si mesmo a grandes distâncias. Para maiores detalhes ver referência [4].

* Endereço de correspondência: alan.toribio@ufes.br

[1] É muito interessante notar que recentemente as técnicas experimentais têm avançado o suficiente para simular o experimento mental de Schrödinger, usando no lugar do gato um qubit que pode ser monitorado, mantendo sua superposição quântica, de forma que se possa inferir com antecedência o pulo quântico. Para detalhes ver a referência [3].

Todos estes problemas e críticas à teoria quântica estão relacionados com a chamada teoria da medida. Na física quântica para fazer uma medida é necessário que o sistema quântico em estudo e o aparelho de medida interajam entre si. Como o sistema quântico é composto por uma superposição de estados se esperaria que o resultado inclua também uma superposição de estados. No entanto, o que é observado é uma medida definida. Em forma simplificada isto constitui o problema da medida e tem dado origem às múltiplas interpretações da mecânica quântica.

A solução dada pela mecânica quântica ortodoxa a este problema consiste na hipótese do colapso da função de onda ou do pacote de ondas reduzido. Está solução foi porposta por Heisenberg no seu famoso artigo publicado na revista Zeitschrift für Physik em 1927 [5], onde propõe o princípio da incerteza. Especificamente na seção três do artigo, Heisenberg discute a transição de um mundo quântico para um mundo clássico ou macroscópico. Heisenberg não usou a palavra colapso, ele utilizou a palavra "reduzida" para se referir ao colapso da função de onda. Nesta interpretação um dado sistema quântico é considerado como um sistema fechado e evolui de forma determinista e unitária governado pela equação de Schrödinger, mas não proporciona um mecanismo para selecionar um valor específico quando se realiza uma medida. Quando acontece uma medida, isto é, uma interação entre o sistema quântico e o aparelho de medida, a evolução da função de onda se assume como indeterminista e não unitária. Assim, o processo de medida faz com que o sistema quântico abandone seu estado de superposição e permite selecionar numa base específica um resultado definido.

No entanto, poderíamos perguntarmos qual é a dinâmica deste processo que seleciona um estado específico entre todos os possíveis. Isto está fortemente associado com a transição entre um mundo quântico e um mundo clássico.

A hipóteses do colapso na mecânica quântica é considerada como uma solução ad hoc sem um fundamento conceitual da teoria. Isto constitui um problema importante não só desde o ponto de vista dos fundamentos físicos da teoria, mas também desde o ponto de vista das aplicações práticas. Por exemplo, a teoria da medida é fundamental na construção da teoria da correção quântica de erros que permite produzir protocolos para fazer viável a computação quântica e a troca de informação [6]. Um melhor controle dos erros quânticos em sistemas de qubits, que são unidades de informação quântica e que fisicamente podem ser representados pelo spin de um elétron, permitiriam avançar na construção de computadores quânticos e na implementação de melhores sistemas criptográficos.

Neste contexto, avanços fundamentais foram feitos no entendimento do processo da medida quântica com a introdução da chamada teoria da decoerência. Esta teoria pode ser considerada como uma extensão natural da própria mecânica quântica ortodoxa, pois não precisa de um novo referencial teórico. Esta teoria tem conseguido numerosos resultados teóricos importantes e diversas comprovações experimentais. Portanto, atualmente toda nova interpretação da mecânica quântica deve levar em conta seus resultados.

Como mencionado anteriormente, o problema da medida tem estimulado diversas interpretações da mecânica quântica. Para termos uma ideia do enorme dinamismo desta área de pesquisa, sem entrar em detalhes, podemos mencionar alguns exemplos de interpretações da mecânica quântica: a interpretação lógica quântica de Garrett Birkhoff e von Neumann de 1936 [7], a interpretação de de Broglie de 1927 e de David Bohm de 1952 [8], a interpretação de mundos paralelos de Hugh Everett de 1957 [9], a interpretação de Rovelli de 1994 [10], denominada de mecânica quântica relacional, entre outras. Uma das mais recentes é a chamada interpretação de Montevidéu da mecânica quântica de Gambini, Pullin e coautores [11–13].

Neste sentido, no presente trabalho, descrevemos de forma resumida a interpretação de Montevidéu da mecânica quântica que está baseada em certos resultados associados com gravitação quântica e na introdução de uma variável de tempo medida por um relógio realista. Como resultado desta abordagem é possível mostrar que surge uma nova fonte de decoerência denominada decoerência fundamental, que permite relaxar os problemas que a teoria da decoerência apresenta. Mesmo não sendo uma solução completa para a teoria da medida a interpretação de Montevidéu representa uma nova forma de encarar o problema e pode levar a resultados gerais importantes e contribuir para elucidar o complexo processo de uma medida quântica.

O presente trabalho está estruturado da seguinte forma. Na seção 2 apresentamos resumidamente a teoria da decoerência quântica, onde usamos um sistema simple para ilustrar suas principais características. Na seção 3 discutimos o problema do tempo como variável quântica. Na seção 4 consideramos os limites fundamentais sobre grandezas que surgem de argumentos relativísticos e quânticos. Na seção 5 apresentamos o conceito de evento na interpretação de Montevidéu e na seção 6 as conclusões.

2. Decoerência Quântica

A decoerência quântica pode ser definida como a destruição da coerência ou da interferência quântica de um sistema. Esta interferência quântica é uma das características mais peculiares da física quântica e resulta do princípio de superposição. Esta característica é fundamental para aplicações recentes como computação quântica. A teoria da decoerência é atualmente a explicação padrão do problema da medida e para referências ver os artigos de revisão [14–16].

É quase um consenso assumir que a teoria da decoerência começou na década dos 70 com os trabalhos de Zeh. Ver referências [17] e [18]. Ele reconheceu que um sistema quântico tem que ser considerado como um sistema aberto em interação com o aparelho de medida o qual constitui um sistema macroscópico. Sistemas macroscópicos nunca estão isolados e pode-se pensar que estão continuamente em contato com outros sistemas.

Outro trabalho seminal que colaborou na construção da teoria da decoerência está associado com o estudo de sistemas quânticos dissipativos. Um sistema desse tipo foi estudado por Caldeira e Leggett [19]. Especificamente eles estudaram como sistema quântico um SQUID (Superconducting quantum interference device) e observaram que o efeito da vizinhança, constituida por um banho térmico, destruía o efeito de tunelamento quântico no SQUID e desta forma fenômenos de superposição foram anulados e o sistema apresentava uma transição para o mundo clássico.

Adicionalmente, o interesse de Wheeler pelos fundamentos da mecânica quântica, no final da década dos 70 e começos dos 80 do século passado, impulsaram decisivamente a construção da teoria da decoerência. A respeito revisar, por exemplo, a referência [2]. Neste constexto, no início dos anos 80 Wojciech Zurek, um ex aluno de Wheeler, desenvolveu uma série de trabalhos que permitiram avançar significativamente com a teoria da decoerência. Zurek também publicou um artigo em 1991 no Physics Today [20] que alavancou a teoria dentro da comunidade de físicos permitindo que o problema da decoerência se transforme em um problema popular gerando diversas discussões científicas. Para ver a dinâmica destas discussões é ilustrativo revisar um artigo de discussão da Physics Today de 1993 [21].

Por outro lado, algumas das consequências experimentais da teoria da decoerência têm sido intensamente investigadas. Uma das primeiras experiências observacionais da teoria da decoerência foi desenvolvida em 1996 no laboratório Kastler-Brossel de Paris. Brune e coautores [22, 23], entre eles Haroche, observaram como estados coerentes eram selecionados. Eles construíram estados coerentes dentro da cavidade usando fótons pouco energéticos com frequências da ordem de micro-ondas. Assim, dentro da cavidade havia fótons em estados que poderíamos chamar de "ligados" e "desligados" formando interferência quântica. Depois enviaram um átomo de rubidio adequadamente preparado (eles escolheram um átomo de Rydberg em dois estados circulares) de forma que o átomo ao entrar na cavidade afetava a energia dos fotóns, o que refletia numa mudança de fase aleatória. Analisando os átomos de rubidio que saim da cavidade os experimentadores estimaram o tempo da decoerência. O experimento mostrou que nesse sistema simples o tempo de decoerência é inversamente proporcinal ao número de fotóns. Deste resultado se pode inferir que para objetos macroscópicos o tempo de decoerência deve ser extremadamente pequeno. Portanto, é uma boa aproximação supor que objetos macroscópicos não apresentam estados coerentes ou estados em superposição.

Para ilustrar algumas das principais características da teoria da decoerência vamos apresentar o problema da medida de acordo com a proposta de von Neumann de 1932 [24] a qual se distingue da proposta de Bohr, pois von Neumann considerou que o aparelho de medida também deveria ser um sistema quântico. Especificamente vamos a assumir o sistema estudado por Zurek [20]. Por simplicidade ele considerou um sistema com dois níveis que fisicamente pode ser representado pelo spin de um elétron.

Consideramos um sistema quântico S com um espaço de Hilbert H_S. Para este sistema, S, numa dada base $\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$, usando a notação Bra-ket, podemos escrever um estado puro como [20]:

$$|\Psi\rangle = \alpha\,|\uparrow\rangle + \beta\,|\downarrow\rangle\,, \tag{1}$$

onde antes de uma medição os coeficientes complexos satisfazem a relação

$$\alpha^2 + \beta^2 = 1. \tag{2}$$

Por outro lado, consideramos um detector D com um espaço de Hilbert H_D e com uma base dada por $\{|d_\downarrow\rangle, |d_\uparrow\rangle\}$. Neste contexto, assumimos que o detector quântico, D, está inicialmente no estado $|d_\downarrow\rangle$ e interage com o sistema quântico, S, no estado $|\uparrow\rangle$. Vamos a escolher para o estado inicial do aparelho que: $|\uparrow\rangle\,|d_\downarrow\rangle \to |\uparrow\rangle\,|d_\uparrow\rangle$, isto é, quando o spin está para cima $|\uparrow\rangle$.

Agora, se consideramos o sistema quântico S em conjunto com o detector D evoluindo como um todo, podemos definir um vetor de estado inicial para este sistema composto da seguinte forma:

$$|\Phi^i\rangle = (\alpha\,|\uparrow\rangle + \beta\,|\downarrow\rangle)\,|d_\downarrow\rangle\,, \tag{3}$$

onde o estado que resulta desta interação, entre o sistema e o detector, em geral, é um estado entrelaçado. Portanto, o estado composto deve evoluir para uma correlação dada por,

$$|\Phi^c\rangle = \alpha\,|\uparrow\rangle\,|d_\uparrow\rangle + \beta\,|\downarrow\rangle\,|d_\downarrow\rangle\,. \tag{4}$$

Em princípio, se levamos em conta uma interação adequada entre o sistema e o detector, então podemos usar a equação de Schrödinger para descrever este sistema composto. Este tipo de evolução é considerada como unitária. O sistema composto resultante apresenta superposição de estados e desde o ponto de vista da teoria da medida não é satisfatório pois não temos um único resultado definido.

Para descrever adequadamente as características físicas deste sistema composto resulta útil utilizar o formalismo da matriz densidade que inicialmente foi introduzida por von Neumann [25].

Em geral, se consideramos um sistema quântico arbitrário caracterizado por um conjunto de vetores de estado $|\psi_i\rangle$, os quais têm probabilidades p_i, podemos caracterizar nosso conhecimento do sistema por construir a seguinte grandeza,

$$\rho = \sum_i p_i\,|\psi_i\rangle\,\langle\psi_i|, \tag{5}$$

a qual é denominada matriz de densidade e satisfaz duas propriedades matemáticas fundamentais:

- A matriz densidade ρ tem um traço igual à unidade ($Tr[\rho] = 1$).
- Uma matriz densidade é uma matriz positiva ($\rho > 0$).

Adicionalmente, pode se mostrar que a matriz densidade é Hermitiana. Para uma dada matriz de densidade é fácil verificar se ela representa um estado puro ou misturado. Para estado puros se verifica $Tr[\rho^2] = Tr[\rho] = 1$. Portanto, se $Tr[\rho^2] < 1$, então o sistema é misturado. A quantidade $Tr[\rho^2]$ é chamada a pureza do estado, e fica restringida pelo vínculo $\frac{1}{d} \leq Tr[\rho^2] \leq 1$, onde d é a dimensão do espaço de Hilbert.

Por outro lado, se consideramos unicamente estados puros podemos escrever para o caso da equação (4) a matriz de densidade da forma [20]:

$$\rho^c \;=\; |\Phi^c\rangle \langle \Phi^c| \,, \tag{6}$$

onde se substituímos explicitamente a forma de $|\Phi^c\rangle$ obtemos para a matriz de densidade,

$$\begin{aligned}\rho^c = |\alpha|^2 |\uparrow\rangle \langle \uparrow| d_\uparrow\rangle \langle d_\uparrow| + \alpha\beta^* |\uparrow\rangle \langle \downarrow| d_\uparrow\rangle \langle d_\downarrow| \\ + \alpha^*\beta |\downarrow\rangle \langle \uparrow| d_\downarrow\rangle \langle d_\uparrow| + |\beta|^2 |\downarrow\rangle \langle \downarrow| d_\downarrow\rangle \langle d_\downarrow| \,,\end{aligned} \tag{7}$$

Desde o ponto de vista formal esta expressão é uma solução da equação de Schrödinger, mas entra em conflito com uma interpretação usual de probabilidades. Enquanto os coeficientes dos elementos diagonais podem ser facilmente interpretados como sendo as probabilidades do sistema no estado $|\uparrow\rangle$ ou no estado $|\downarrow\rangle$ (com as correlações correspondendo aos estados do detector $|d_\uparrow\rangle$ e $|d_\downarrow\rangle$ respectivamente). Os coeficientes dos elementos fora da diagonal não podem ser interpretados classicamente como probabilidades. Para poder corresponder com os resultados das medidas, feitas sobre o sistema, o ensemble de estados puros, ρ^c, deve se reduzir a uma mistura estatística que será diagonal em uma dada base e com uma adequada correlação entre o sistema e o detector. A interpretação ortodoxa da mecânica quântica introduz o conceito de colapso da função de onda para obter uma matriz reduzida da expressão anterior. Isto resulta equivalente a considerar os elementos diagonais da forma:

$$\rho^r = |\alpha|^2 |\uparrow\rangle \langle\uparrow| |d_\uparrow\rangle \langle d_\uparrow| + |\beta|^2 |\downarrow\rangle \langle\downarrow| |d_\downarrow\rangle \langle d_\downarrow| \,. \tag{8}$$

Esta matriz reduzida ou de mistura pode ser interpretada classicamente. Podemos ter correlações clássicas. Por exemplo, imaginemos que conhecemos que um recipiente tem duas bolinhas de cores diferentes, uma vermelha e outra azul, e que tiramos do recipiente primeiro uma bolinha vermelha. Neste contexto, podemos esperar que a outra bolinha seja da cor azul, mesmo sem, de fato, tirar a bolinha do recipiente. Este sistema tem uma correlação clássica onde as probabilidades de obter uma dada bolinha de uma dada cor podem ser determinadas pela matriz reduzida.

Por outro lado, outra forma de entender porque a matriz de densidade, ρ^c, não pode ser interpretada classicamente resulta de considerar uma combinação linear entre os estados do sistema. Por exemplo, em lugar de usar os vetores próprios $|\uparrow\rangle$ e $|\downarrow\rangle$ para a matriz de Pauli σ_z, podemos usar os vetores próprios para a matriz de Pauli σ_x. De forma concreta podemos escolhar $\alpha = -\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ e definir os seguintes vetores de estado [26, 27],

$$|\odot\rangle = \frac{(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)}{\sqrt{2}} \tag{9}$$

$$|\otimes\rangle = \frac{(|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle)}{\sqrt{2}} \tag{10}$$

usando estes vetores próprios podemos reescrever $|\Phi^c\rangle$ da seguinte forma

$$|\Phi^c\rangle = \frac{|\otimes\rangle |d_\otimes\rangle - |\odot\rangle |d_\odot\rangle}{\sqrt{2}} \tag{11}$$

onde utilizamos as seguintes definições como vetores base do detector $|d_\otimes\rangle = (|d_\uparrow\rangle + |d_\downarrow\rangle)/\sqrt{2}$ e $|d_\odot\rangle = (|d_\downarrow\rangle - |d_\uparrow\rangle)/\sqrt{2}$. Desta forma agora podemos usar esta nova definição do vetor $|\Phi^c\rangle$ para construir a matriz de densidade, ρ^c, e desta matriz derivar a matriz reduzida. Em outras palavras podemos observar que antes de ser feita a medida não temos uma base definida na qual se pode fazer a leitura da observação obtendo um determinado valor.

Isto constitui de forma sucinta o problema da medida como colocado por von Neumann e sobre esta base é discutido o mecanismo físico da transição entre a matriz pura e a matriz reduzida: $\rho^c \to \rho^r$. A respeito o principal mecanismo desta transição é a decoerência quântica induzida pelo ambiente [2]. Quando o sistema é fechado o princípio de superposição se aplica sem problema nenhum, mas quando o sistema é aberto a interação do sistema com o ambiente induz o sistema a selecionar certos observáveis. De forma simplificada podemos falar que o estado puro evolui para uma mistura estatística que pode se interpretar de forma clássica.

Neste contexto, podemos introduzir o conceito de decoerência ambiental mediante a interação entre o detector e o ambiente, e vamos a caracterizar o ambiente pelo vetor de estado inicial denotado como $|A_0\rangle$ [26, 27]. Em síntesis podemos observar que quando temos três sistemas quânticos correlacionados: sistema S, detector D e ambiente A podemos construir um mecanismo físico para estudar as medidas quânticas. Este modelo simplificado é fundamentado em duas hipóteses [26]:

- Consideramos que o detector interage com o ambiente via algum hamiltoniano específico de interação H_{DA}.
- Assumimos que o observador interage unicamente com o detector e não com o ambiente.

Vamos a assumir o estado inicial entrelaçado do sistema S e do detector D como dado anteriormente pelo vetor $|\Phi_i\rangle$ e adicionar a interação com o ambiente. Então, o estado correlacionado inicial para o sistema composto total pode ser escrito por,

$$|\Psi_0\rangle = |\Phi^c\rangle |A_0\rangle = (\alpha |\uparrow\rangle |d_\uparrow\rangle + \beta |\downarrow\rangle |d_\downarrow\rangle) |A_0\rangle , \quad (12)$$

onde usamos nossa definição do estado inicial da interação entre o sistema e o detector: $|\uparrow\rangle |d_\downarrow\rangle \rightarrow |\uparrow\rangle |d_\uparrow\rangle$. Assim, a evolução da interação desta cadeia de von Neumann (sistema mais detector e mais ambiente) produz uma correlação que pode ser expressada da forma:

$$|\Psi_{SDA}\rangle = \alpha |\uparrow\rangle |d_\uparrow\rangle |A_\uparrow\rangle + \beta |\downarrow\rangle |d_\downarrow\rangle |A_\downarrow\rangle . \quad (13)$$

Usando este vetor de estado, que representa o sistema composto correlacionado, podemos aproveitar as propriedades do formalismo da matriz de densidade para derivar a matriz de densidade reduzida. Para nosso caso de estudo podemos obter a matriz densidade reduzida como a matriz de um subsistema do espaço de Hilbert total, $S \bigotimes D \bigotimes A$, por avaliar o traço parcial da matriz de densidade composta total ρ_{SDA} com respeito ao subsistema A do ambiente. Assim podemos definir:

$$\rho^r = Tr_A(\rho_{SDA}) = Tr_A |\Psi_{SDA}\rangle \langle\Psi_{SDA}| , \quad (14)$$

onde Tr_A é o traço parcial da matriz total ρ_{SDA}. Para determinar o resultado explicitamente assumimos que os estados do ambiente $|A_i\rangle$, correspondendo aos estados do detector $|d_\uparrow\rangle$ e $|d_\downarrow\rangle$, são ortogonais:

$$\langle A_i| |A_j\rangle = \delta_{ij}. \quad (15)$$

Desta maneira, usando estas definições podemos substituir a expressão determinada para $|\Psi_{SDA}\rangle$ e obtermos:

$$\rho^r = \sum_i \langle A_i| |\Psi_{SDA}\rangle \langle\Psi_{SDA}| |A_i\rangle . \quad (16)$$

A questão interessante do mecanismo da decoerência resulta deste processo, pois quando calculamos a matriz de densidade reduzida ρ^r obtemos a matriz ρ_{SD} que corresponde à matriz de densidade de interação entre o sistema e o aparelho, a qual foi derivada anteriormente usando a hipotéses do colapso:

$$\rho^r = \rho_{SD} \ = \ |\alpha|^2 |\uparrow\rangle \langle\uparrow| |d_\uparrow\rangle \langle d_\uparrow| + |\beta|^2 |\downarrow\rangle \langle\downarrow| |d_\downarrow\rangle \langle d_\downarrow| . \quad (17)$$

Portanto, se observa que para este exemplo específico, a dinâmica do processo permite selecionar uma dada base denominada de base ponteiro. A base ponteiro é definida por Zurek como a base na qual as correlações entre o aparelho e o sistema não são perturbadas pelo ambiente. Assim, na prática para este sistema simples a decoerência leva a uma mistura estatística o que significa que podemos interpretar os resultados como probabilidades clássicas.

Uma forma geral de entender esta característica da base ponteiro resulta de considerar o hamiltoniano de interação entre o detector e o ambiente. Zurek nos artigos [26] e [27] demonstrou para alguns casos simples que se consideramos uma escolha adequada do hamiltoniano H_{int} se verifica que:

$$[\eta, H_{int}] = 0, \quad (18)$$

para um dado observável η. Portanto, quando um sistema está num estado próprio do observável η, que pode ser pensado como um observável ponteiro, o observável constitui uma constante do movimento, isto é, uma quantidade que se conserva quando o sistema composto evolui. Isto nos permite entender de alguma forma o conceito da base ponteiro.

Por outro lado, para derivar a equação de movimento de um sistema interagindo com o ambiente, a teoria da decoerência faz uso da equação master, que representa a equação de movimento no formalismo da matriz densidade. Para derivar esta equação resulta útil lembrar que a estrutura da equação de Schrödinger se obtém por postular que a evolução, de um dado estado do sistema, resulta de uma transformação linear representada, por exemplo, por um operador U. Isto é, podemos escrever a evolução temporal do sistema entre t_0 e t como

$$|\psi(t)\rangle = U(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle . \quad (19)$$

Adicionalmente, se levarmos em conta a interpretação probabilística da mecânica quântica podemos escrever,

$$\langle\psi|\psi\rangle = 1. \quad (20)$$

Agora considerando em conjunto ambas propriedades inferimos que o operador U além de ser linear deve ser unitário. Portanto, a evolução temporal deve ser descrita por uma matriz unitária. Com estas propriedades podemos derivar a equação de Schrödinger na sua forma mais familiar [28],

$$i\hbar \frac{\partial |\psi(t)\rangle}{\partial t} = H |\psi(t)\rangle . \quad (21)$$

Por outro lado, derivando a equação (5) com respeito ao tempo obtemos:

$$\frac{d\rho(t)}{dt} \ = \ \sum_i p_i \left(\frac{d|\psi_i(t)\rangle}{dt} \right) \langle\psi_i(t)| + \sum_i p_i |\psi_i(t)\rangle \left(\frac{d\langle\psi_i(t)|}{dt} \right). \quad (22)$$

Também podemos considerar o hermitiano conjugado da equação de Schrödinger:

$$-i\hbar \frac{\partial \langle\psi(t)|}{\partial t} = \langle\psi(t)| H. \quad (23)$$

Então, usando estes resultados podemos obter

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = \sum p_j \left(\frac{H}{i\hbar} \right) |\psi_j(t)\rangle \langle\psi_j(t)|$$

$$+\sum p_j \left|\psi_j(t)\right\rangle \left\langle\psi_j(t)\right| \left(-\frac{H}{i\hbar}\right) \tag{24}$$

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = \left(\frac{1}{i\hbar}\right)(H\sum_j p_j \left|\psi_j(t)\right\rangle \left\langle\psi_j(t)\right|)$$

$$-\left(\frac{1}{i\hbar}\right)(\sum_j p_j \left|\psi_j(t)\right\rangle \left\langle\psi_j(t)\right|)H \tag{25}$$

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = \frac{1}{i\hbar}\left(H\rho(t) - \rho(t)H\right). \tag{26}$$

onde temos trocamos a notação do indice i por j para evitar confusão com o número complexo i, assim usando a notação de comutador podemos escrever:

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[H,\rho] \tag{27}$$

Esta equação é denominada equação de Liouville-von Neumann por sua analogia com a equação clássica de Liouville . Também resulta importante destacar que a densidade ρ é a densidade do sistema composto. A evolução dinâmica da matriz de densidade reduzida pode ser determinada desta equação usando o traço parcial sobre os estados do ambiente os quais são denotados pelo índice A,

$$Tr_A\left(\frac{d\rho(t)}{dt}\right) = \frac{1}{i\hbar}Tr_A([H,\rho]), \tag{28}$$

onde, por simplicidade, podemos assumir que o sistema quântico não está em interação com o ambiente. Deste modo, o hamiltoniano pode ser decomposto em duas partes uma correspondendo ao sistema e outra correspondendo ao ambiente: $H = H_{sis} + H_A$ e a equação pode ser escrita como:

$$\frac{d\rho_{sis}(t)}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[H_{sis},\rho_{sis}]. \tag{29}$$

Neste caso, a evolução da matriz de densidade reduzida é unitária, mas no caso de haver uma interação entre o sistema e o ambiente o hamiltoniano de interação, H_{int}, implicaria que a evolução da matriz densidade reduzida, em geral, não seria unitária.[2]

Usando a equação de Liouville-von Neumann podemos estudar processos de decoerência induzidos pelo ambiente modelando adequadamente o termo de interação. Como um exemplo vamos a considerar um *qubit* com o hamiltoniano dado por $H = \frac{\Omega}{2}\sigma_z$, onde σ_z é a matriz de Pauli. Vamos a considerar a equação de movimento dada na forma:

$$\frac{d\rho}{dt} = -i[H,\rho] + \frac{\gamma}{2}\left(\sigma_z\rho\sigma_z - \rho\right), \tag{31}$$

[2] A forma mais geral que preserva o traço e é uma forma positiva é a equação master de Lindblad para a matriz densidade reduzida:

$$\frac{d\rho_{sis}(t)}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[H_{sis},\rho_{sis}] + \sum \frac{1}{2}\left[2C\rho_{sis}C^\dagger - \{C^\dagger C,\rho\}\right]. \tag{30}$$

Esta equação também é conhecida como equação Lindblad-Gorini-Kossakowski- Sudarshan [29].

onde γ é uma constante de acoplamento entre o sistema e o ambiente. Se a constante γ se anula, então a dinâmica do sistema resulta unitária. Por outro lado, a solução desta equação master, neste caso específico, é relativamente direta. Porém, este modelo nos permite observar as principais características da decoerência. Para solucionar a equação acima podemos usar uma parametrização da matriz densidade da forma:

$$\rho = \begin{pmatrix} p_+ & q \\ q^* & p_- \end{pmatrix}. \tag{32}$$

Consideramos a condição de normalização $p_+ + p_- = 1$ e assumimos estados puros de forma que podemos escrever $|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$. Além disso, levando em conta explicitamente a expressão da matriz de Pauli,

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{33}$$

resulta relativamente fácil mostrar que a equação master pode se escrever na forma do sistema de equações:

$$\frac{dp_\pm}{dt} = 0 \tag{34}$$

$$\frac{dq}{dt} = -q(i\Omega + \gamma). \tag{35}$$

Deste sistema de equações deduzimos que a solução para $p_\pm$ é uma constante e para q pode-se escrever:

$$q = q_0 e^{-(i\Omega+\gamma)t}. \tag{36}$$

Então, se começamos com um estado puro observamos que o sistema pode evoluir, como produto de sua interação com o ambiente, para um estado representado pela matriz de densidade:

$$\rho = \begin{pmatrix} |a|^2 & ab^* e^{-(i\Omega+\gamma)t} \\ a^*b e^{-(-i\Omega+\gamma)t} & |b|^2 \end{pmatrix}. \tag{37}$$

Deste modo, observamos que os termos fora da diagonal decaem de forma exponencial e verificamos que a ação do ambiente é basicamente mudar as probabilidades quânticas associadas com estados de superposição para estados misturados. Portanto, de forma aproximada podemos escrever:

$$\rho \approx \begin{pmatrix} |a|^2 & 0 \\ 0 & |b|^2 \end{pmatrix}. \tag{38}$$

Deste resultado observamos que a matriz densidade pode ser aproximada por uma matriz diagonal e neste caso representa uma mistura estatística perfeita e pode-se interpretar de forma clássica.

Em geral, em concordância com o discutido, podemos ver que o mecanismo da decoerência é fundamental para entender o problema da medida em física quântica. No entanto, diversas pesquisas têm estendido o rol da decoerência fora dos limites da física quântica. Desta

 DOI: https://doi.org/10.1590/1806-9126-RBEF-2021-0384

forma, o mecanismo da decoerência é bastante útil em diferentes áreas como, por exemplo, química quântica, cosmologia quântica e principalmente na informação quântica, entre otras áreas [30]. Diante de tantas aplicações Schlosshauer [16] menciona que qualquer que seja o mecanismo que possa levar à construção de uma consistente teoria quântica, como base de um mundo clássico, a decoerência deve ser um ingrediente fundamental da teoria.

Mas todo este desenvolvimento não significa que a decorência não esteja sujeita a problemas fundamentais. Em geral, a teoria da decoerência não é uma teoria completa que soluciona de forma irrefutável o problema da medida em mecânica quântica. Um dos principais problemas de discusão consiste em considerar sistemas fechados. Se consideramos o sistema mais o ambiente como um único sistema, então este sistema completo pode ser considerado como fechado. Desta forma, em princípio, a evolução do sistema total deveria ser unitária. Poderíamos afirmar que a informação não se perde e que de alguma forma está presente mesmo depois da decoerência induzida pelo ambiente. Por exemplo, se consideramos a solução da equação master, apresentada anteriormente, podemos ver que termos fora da diagonal não são estritamente nulos o que pode dar origem a pequenas probabilidades para os termos de interferência. Depois de um longo período o estado de superposição quântica poderia ser recuperado. Isto constitui um problema formal para a decoerência, ainda que na prática um sistema quântico em interação com um macrossistema, com inumeros graus de liberdade, rapidamente evoluia para uma mistura estatística. Para detalhes e referências bibliográficas revisar [31–33].

Portanto, a teoria da decoerência é uma teoria incompleta mesmo com seus recentes desenvolvimentos [34] e ainda múltiplas interpretações da mecânica quântica são possíveis e entre elas a chamada interpretação de Montevidéu. Esta interpretação considera o tempo como fundamental para estudar a evolução do sistema. Incluir o tempo diretamente como variável quântica resulta matematicamente inconsistente. No entanto, podemos incluir relógios que marcam uma grandeza identificada com o tempo real diferente do tempo ideal. Na seção seguinte apresentamos e discutimos brevemente os principais resultados desta interpretação da mecânica quântica.

3. Introduzindo o Tempo na Mecânica Quântica

A interpretação de Montevidéu da mecânica quântica proposta por Gambini, Pullin e coautores [11–13] é construída sobre a ideia de considerar as implicações do tempo na mecânica quântica. Esta proposta tem sua motivação nos estudos de gravitação quântica, onde o tempo é considerado desde o início como um grau de liberdade do sistema.

Dentro da mecânica quântica ortodoxa o tempo entra na teoria como um parâmetro externo, definido de forma clássica, como o tempo absoluto newtoniano. Na mecânica quântica relatívista o tempo próprio também é clássico, pois é definido por uma métrica do espaço tempo sem usar conceitos quânticos.

Porém, a discussão sobre o tempo na mecânica quântica se remonta aos inicios da própria teoria. Por exemplo, podemos mencionar as críticas de Rutherford sobre os pulos quânticos entre estados estacionários do modelo de Bohr. Neste modelo Bohr não tinha um mecanismo de como determinar o tempo de transição entre estados estacionários e, portanto, de inferir uma dinâmica do pulo quântico. Depois na mecânica quântica a discussão sobre o tempo é apresentada de forma consistente por John von Neumann [24] em 1932. Adicionalmente, Pauli [35] no seu livro de 1933 também aborda o tema destacando a inconsistência de considerar o tempo como uma variável canônica conjugada. Esta conclusão pode ser inferida da equação de movimento da mecânica matricial:

$$[F, H] = -\dot{F}\hbar, \tag{39}$$

onde se assumimos que F represente o tempo podemos escrever

$$[t, H] = -i\hbar. \tag{40}$$

No entanto, esta relação, como observou Pauli, é inconsistente pois o tempo considerado como um operador contínuo e universal deveria ter valores próprios que mudam continuamente desde $-\infty$ até $+\infty$. Este comportamento do tempo entra em contradição com os valores próprios do Hamiltoniano que em muitos casos resultam ser discretos. Esta contradição levou a Pauli a concluir que o tempo como operador está proibido e deve ser considerado simplemente como um número. O tempo entra na mecânica quântica como um elemento externo. Para uma discusão detalhada e outras referência sobre o tempo na mecânica quântica ver referências [36–38].

Uma alternativa ao problema anterior consiste em não procurar quantizar uma variável tempo diretamente e se considerar uma variável dinâmica com a qual se possa definir um sistema para medir o tempo, isto é, um relógio. A respeito, Salecker e Wigner em 1958 [39] utilizaram o conceito de relógio microscópico para determinar os límites que a mecânica quântica pode impor sobre as medidas de distâncias no espaço-tempo. Desta investigação decorre que os relógios devem possuir uma massa mínima para satisfazer as relações de incerteza. De forma complementar, para um sistema quântico específico é necessário também considerar o mecanismo de acoplamento entre o relógio e o sistema [40].

Podemos definir um relógio usando um dado sistema físico, descrito por uma dada variável dinâmica, que sob translação se comporta de forma similar a uma coordenada tipo tempo. Tal variável dinâmica que simplesmente podemos chamar de variável relógio ou variável tempo realista pode representar a posição do ponteiro numa dada escala de medidas e físicamente pode ser, por ejemplo, a direção do spin de uma dada partícula dentro de um campo magnético.

Gambini e coautores [12] consideraram a evolução de um sistema quântico com um relógio realista e mostraram que isto constitui um mecanismo para gerar uma decoerência fundamental que não depende da interação com o ambiente. Para ver de forma explicita este mecanismo vamos fazer uso da ideia de probabilidade condicional em mecânica quântica. Consideramos que todas as grandezas são representadas por operadores quânticos e escolhemos um destes operadores para representar o relógio. Esta variável pode ser denominada de variável temporal (tempo realista). Depois podemos perguntarmos qual será a probabilidade condicional que uma dada variável tome um determinado valor se a variável temporal toma um outro valor. Este tipo de abordagem é considerada uma descrição relacional da mecânica quântica.

Se consideramos um sistema S e um relógio R podemos focar em determinar a probabilidade que algum observável $\hat{O}$ do sistema tome um valor em uma vizinhança O_0, dado que o observável temporal $\hat{T}$ toma um valor em uma vizinhança T_0. Tecnicamente primeiro necesitamos definir os projetores sobre o subespaço correspondente às vizinhanças de O e T da forma [13]:

$$P_{O_0} = \int_{O_0-\Delta O}^{O_0+\Delta O} dO \sum |O,j\rangle\langle O,j| \tag{41}$$

$$P_{T_0} = \int_{T_0-\Delta T}^{T_0+\Delta T} dT \sum |T,k\rangle\langle T,k| \tag{42}$$

onde $|O,j\rangle$ e $|T,k\rangle$ são os autoestados dos operador $\hat{O}$ e $\hat{T}$ e O e T são seus respectivos autovalores. Os indices j e k correspondem aos autovalores que formam conjuntos completos de operadores que comutam con $\hat{O}$ e $\hat{T}$. Portanto, usando estas definições podemos escrever a probabilidade condicional que se interpreta como uma distribuição de probabilidade. Esta distribuição pode ser motivada pensando, por ejemplo, que podemos preparar cópias do sistema original de forma que se pode construir um ensemble dos sistemas. Esto significa que repetimos o experimento muitas vezes. Assim, em cada realização do experimento se registra um valor para as variáveis O e T para algum valor do parâmetro aleatório t. Depois de muitas repetições do experimento se contam quantas vezes se obtiveram um par de valores O e T e se divide pelo número total de realizações. De esta forma se pode obter a distribuição de probabilidade mencionada.

Matematicamente podemos escrever a probabilidade condicional para os observáveis representados pelos operadores $\hat{O}$ e $\hat{T}$ sujeitos às restrições de obter um valor para $\hat{O}$ que pertença ao intervalo $I_{\Delta O} = [O - \Delta O, O + \Delta O]$, dado que o valor do observável $\hat{T}$ pertence ao intervalo $I_{\Delta T} = [T - \Delta T, T + \Delta T]$. Portanto, temos que [41–43]:

$$P(O \in I_{\Delta O}|T \in I_{\Delta T}) = \lim_{\tau\to\infty} \frac{\int_{-\tau}^{+\tau} Tr(P_O P_T \rho(t) P_T)dt}{\int_{-\tau}^{+\tau} Tr(P_T(t)\rho)dt}.$$

Vamos a assumir que o sistema e o relógio interagem fracamente de forma que a matriz densidade total, ρ, pode ser expressada pelo produto tensorial da matriz densidade do sistema, ρ_{sis}, vezes a matriz densidade do relógio, ρ_r, resultando: $\rho = \rho_{sis} \otimes \rho_r$. Como consequência desta hipótese podemos escrever a relação de comutação para os observáveis $[P_T, P_O] = 0$, pois estes observáveis pertencem a sistemas diferentes. Com estas propriedades, e usando a propriedade cíclica do traço, podemos escrever que:

$$\begin{aligned} &P(O \in I_{\Delta O}|T \in I_{\Delta T}) \\ &\quad = \lim_{\tau\to\infty} \frac{\int_{-\tau}^{+\tau} Tr(P_O \rho_{sis}(t)) Tr(P_T \rho_r(t))}{\int_{-\tau}^{+\tau} Tr(P_T \rho_r(t)) Tr(\rho_{sis}(t))}. \end{aligned}$$

Para resolver a probabilidade condicional precisamos escolher uma relação entre a probabilidade do relógio marcar T quando o tempo ideal é t da forma [42, 43]:

$$\mathcal{P}_t(T) = \frac{Tr_r(P_T \rho_r(t))}{\int_{-\infty}^{+\infty} Tr_r(P_T \rho_r(t))dt}. \tag{43}$$

Então, usando esta definição podemos reescrever a probabilidade condicional [42, 43]:

$$P(O \in I_{\Delta O}|T \in I_{\Delta T}) = \int_{-\infty}^{+\infty} Tr(P_O \rho_{sis}) \mathcal{P}_t(T) dt. \tag{44}$$

Agora se fazemos uso das propriedades matemáticas do traço parcial podemos mostrar que a equação anterior pode ser reescrita da forma [42]:

$$P(O \in I_{\Delta O}|T \in I_{\Delta T}) = Tr\left(P_O \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_{sis} \mathcal{P}_t(T) dt\right). \tag{45}$$

Observando a equação anterior podemos definir uma matriz de densidade efectiva:

$$\rho_{eff}(T) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_{sis}(t) \mathcal{P}_t(T)). \tag{46}$$

Para não sobrecarregar a notação simplesmente vamos a chamar a ρ_{eff} como ρ e desta forma nossa probabilidade condicional resulta:

$$P(O \in I_{\Delta O}|T \in I_{\Delta T}) = Tr(P_O \rho(T)). \tag{47}$$

Nestas circunstâncias precisamos considerar alguma forma matemática para a distribuição $\mathcal{P}_t(T)$. Por exemplo, se assumimos que a distribuição é dada por uma delta de Dirac podemos verificar que o relógio se comporta como um relógio de tempo ideal. Mas se consideramos uma generalização semiclássica para $\mathcal{P}_t(T)$ podemos escrever a expansão em série [42]:

$$\begin{aligned} P_t &\approx \delta(T-t) - a(T)(\delta'(T-t)) \\ &\quad + b(T)(\delta''(T-t)) + \cdots , \end{aligned} \tag{48}$$

onde o coeficiente $a(T)$ representa a assimetria da distribuição. Assim, para considerar distribuições simétricas podemos fazer $a(T) = 0$ e o termo $b(T)$ está associada com a dispersão da distribuição. Agora substituindo esta expansão na expressão da probabilidade condicional e considerando que ρ_{sis} obedece a uma equação de Schrödinger com hamiltoniano independente do tempo podemos obter uma expressão para ρ dada pela expressão [42]:

$$\rho(T) = \rho_{sis}(T) - b(T)[H, [H, \rho_{sis}(T)]]. \tag{49}$$

Derivando a expressão anterior com respeito à variável temporal T obtemos a equação tipo master para a matriz de densidade efetiva como:

$$\frac{d\rho(T)}{dT} = i[\rho(T), H] + \sigma(T)[H, [H, \rho(T)]], \tag{50}$$

onde desconsideramos termos quadráticos em b e usamos a definição $\sigma = \frac{db(t)}{dT}$. Resulta importante comentar que se incluimos termos de ordem superior em $b(T)$ a equação tipo master incluiria outros comutadores que os apresentados.

Por outro lado, esta equação em geral é uma equação do tipo Lindblad e podemos observar que o primeiro termo representa a evolução linear e o outro termo implica o fenômeno da decoerência. Esta decoerência se apresenta na base de autoestados do hamiltoniano.

Considerando por simplicidade que σ é constante pode-se mostrar que na base da energia os termos da diagonal não mudam. No entanto, como mostrado por Gambini e coautores [43], os termos fora da diagonal resultam:

$$\rho_{nm} = \rho^0_{nm} e^{i\omega_{nm}T} e^{-\sigma\omega^2_{nm}T}, \tag{51}$$

onde ω_{nm} é a frequência de Bohr sendo que n e m são os níveis de energia. Esta equação implica que para um dado valor T os termos fora da diagonal têm um decaimento exponencial e podem ser desconsiderados. Portanto, este resultado demonstra que se incluímos, no estudo da evolução dinâmica de um dado sistema, um relógio realista o efeito resultante consiste em uma nova fonte de decoerência. Esta decoerência está associada com a variável temporal e, Gambini, Porto e Pullin [12] a denominaram de decoerência fundamental.

Segundo estes autores esta nova fonte de decoerência é mais fundamentais que a decoerência derivada da interação do sistema com o ambiente, isto é, a chamada decoerência ambiental. Para uma melhor compreensão podemos observar que para derivar a equação master não foi necessário considerar uma interação entre o sistema e o relógio realista, nem tampouco introduzir um dado ambiente, bastou considerar um relogio realista onde a medida do tempo estava sujeito a incertezas fundamentais. A decoerencia, neste caso, é produzida pelo fato do tempo ter uma dispersão não nula.

4. Limites Fundamentais Sobre Grandezas

Uma combinação de argumentos quânticos e gravitacionais indicam que grandezas como o tempo, comprimento, direção, etc estão sujeitas a incertezas fundamentais, as quais se constituem em novas fontes de decoerência. Estas fontes de decoerência contribuem ao lado direito da equação master derivada anteriormente. Adicionalmente, esta nova fonte de decoerência também contribui para uma evolução do sistema não unitária.

Os límites fundamentais sobre as incertezas de medidas do tempo e do espaço têm sido derivados usando diferentes argumentos da relatividade geral e da mecânica quântica. Por exemplo, revisar as referências [39, 44–48]. Como exemplo, vamos a revisar a derivação da incerteza fundamental sobre medidas do tempo considerando o argumento de Gambini e Pullin [49], onde um sistema quântico microscópico funciona como um relógio e interage com um observador macroscópico intercambiando sinais. Idealmente podemos considerar o caso onde o observador macroscópico está infinitamente distante do relógio. Neste contexto, a relação entre o tempo medido pelo relógio localmente, t_c, com o tempo do observador, t, pode ser determinada levando em conta a dilatação gravitacional do tempo. Para este objetivo usando a métrica de Schwarzschild podemos escrever, para a dilatação do tempo, a expressão [49],

$$t = \frac{t_c}{\sqrt{1 - \frac{r_s}{r}}}, \tag{52}$$

onde $r_s = \frac{2GE}{c^4}$ é o raio de Schwarzschild, sendo G a constante da gravitação de Newton. Se assumimos, t, como função das grandezas (t_c, r_s) podemos determinar o erro de uma medida do tempo, t, usando a técnica da propagação de erros:

$$\Delta t = \frac{\Delta t_c^2}{1 - \frac{r_s}{r}} + \frac{1}{4} \frac{t_c^2 \Delta r_s^2}{r^2(1 - \frac{r_s}{r})^3}. \tag{53}$$

Levando em conta a definição do raio de Schwarzschild e a relação de incerteza na forma $\Delta E \Delta t_c > h$ podemos escrever [49],

$$\begin{aligned} \Delta t &\geq \frac{\Delta t_c^2}{1 - \frac{r_s}{r}} + \frac{1}{4} \frac{t_c^2 G^2 h^2}{c^8 \Delta t_c^2 r^2 (1 - \frac{r_s}{r})^3} \\ &> \Delta t_c^2 + \frac{1}{4} \frac{t_c^2 G^2 h^2}{c^8 \Delta t_c^2 r^2}, \end{aligned} \tag{54}$$

onde consideramos o fato da grandeza $(1 - \frac{r_s}{r})$ ser positiva e o tamanho do relógio não poder ser menor que o raio de Schwarzschild. Se consideramos que o tamanho do relogio é r e que sua velocidade de marcação das oscilações é $v < c$, então podemos concluir para a incerteza temporal que [43, 49]:

$$\Delta t > \sqrt{3}\pi^{1/3}t^{1/3}t_{planck}^{2/3}. \tag{55}$$

Este resultado está em corespondência com os resultados de outros autores em particular com o resultado do conhecido artigo de Ng e Van Dam [46].

De outro lado, se podemos contruir um relógio com a incerteza mínima, calculada anteriormente, então podemos verificar, usando a equação master, que esta incerteza vai a ser responsável pelo decaimento dos termos fora da diagonal da matriz de densidade $\rho(T)$ dando como resultado [49]:

$$\rho_{nm}(T) = \rho_{nm}^{0} e^{i\omega_{nm}T} e^{-\omega_{nm}^{2} T_{planck}^{4/3} T^{2/3}}, \tag{56}$$

onde T_{Planck} é o tempo de Planck e é responsável por fazer que $\rho_{nm}(T)$ seja extremadamente pequeno. Argumentos semelhantes podem ser usados para derivar incertezas nas medidas do espaço [43].

5. Eventos na Interpretação de Montevidéu

A interpretação de Montevidéu da mecânica quântica considera a evolução de um sistema quântico em conjunto com um relógio realista. O efeito de introduzir um relógio realista resulta em uma nova fonte de decoerência. De outro lado, usando argumentos gravitacionais e quânticos podemos determinar incertezas fundamentais nas medidas das grandezas do tempo, do comprimento, etc. Estas incertezas fundamentais constituem outra nova fonte de decoerência.

Como mencionamos anteriormente, um dos principais problemas da teoria da decoerência consiste em considerar o sistema como fechado incluindo o ambiente. Nestas circunstâncias este sistema deveria voltar a apresentar coerência. A interpretação de Montevidéu propõe solucionar este problema de forma natural, pois as duas novas fontes de decoerência, acima descritas, garantem que o sistema fechado não apresente estados de superposição.

Uma questão que surge deste enfoque relacional da mecânica quântica é o seguinte: desde o ponto de vista da interpretação de Montevidéu o sistema fechado deve ser caracterizado por uma matriz de densidade efetiva que obedece a uma equação tipo Lindblad. Para solucionar o problema da medida a interpretação de Montevideu exige que este resultado da matriz de densidade efetiva deve ser indistinguível do resultado do colapso. Esta é a condição para definir um evento e é denominado, por Gambini e coautores, como estado de indecidibilidade [50]. Podemos formalizar esta ideia de indecidibilidade e estabelecer dois critérios [50, 51]:

O primeiro critério: Seja S um sistema fechado e $A = \sum_n a_n P_{a_n}$ um observável, atuando sobre S, con seus autovalores dados por a_n e seus projetores P_{a_n} sobre os subespaços correspondientes. Um evento acontece quando no se pode distinguir o estado do sistema, no tempo físico T, dado pela matriz densidade efetiva:

$$\rho(T) = \frac{\int P_T \rho(t) P_T dt}{\int Tr(P_T \rho(t))dt}, \tag{57}$$

do estado de colapso dado pela expressão:

$$\rho_c = \sum P_{a_n} \rho(t) P_{a_n}. \tag{58}$$

Sobre estas definições Gambini e coautores, denominam "propriedades esenciais" a todas as propriedades cujos projetores satisfazem a condição de indecidibilidade. Estas "propriedades esenciais" contém a informação de cada grandeza física que adquiere o sistema. Revisemos um exemplo simples proposto na referência [50]. Imaginemos que temos um sistema composto por três spins e um relógio para considerar a evolução do sistema. Então, assumimos que o estado inicial do sistema pode ser escrito na forma:

$$\begin{aligned}\rho(t) = {} & \frac{|c_1|^2}{2} \left(|\uparrow\uparrow\downarrow\rangle + |\uparrow\downarrow\uparrow\rangle\right)\left(\langle\uparrow\uparrow\downarrow| + \langle\uparrow\downarrow\uparrow|\right) \\ & + |c_2|^2 \, |\downarrow\uparrow\uparrow\rangle \langle\downarrow\uparrow\uparrow| \\ & + \frac{c_1 c_2^*}{\sqrt{2}} \left(|\uparrow\uparrow\downarrow\rangle + |\uparrow\downarrow\uparrow\rangle\right)\left(\langle\downarrow\uparrow\uparrow|\right) \\ & + \frac{c_1^* c_2}{\sqrt{2}} \left(|\downarrow\uparrow\uparrow\rangle\right)\left(\langle\uparrow\uparrow\downarrow| + \langle\uparrow\downarrow\uparrow|\right).\end{aligned} \tag{59}$$

Se o sistema evolui e ocorre um evento com as propriedade esenciais dadas pelas expressões

$$P_{a_1} = \left(|\uparrow\uparrow\downarrow\rangle + |\uparrow\downarrow\uparrow\rangle\right)\left(\langle\uparrow\uparrow\downarrow| + \langle\uparrow\downarrow\uparrow|\right), \tag{60}$$

$$P_{a_2} = \left(|\downarrow\uparrow\uparrow\rangle\right)\left(\langle\downarrow\uparrow\uparrow|\right). \tag{61}$$

Então, estas propriedades esenciais determinam as propriedades que os diferentes subsistemas podem adquirir. Em nosso caso as propriedades dos spins. Por exemplo, se a propriedade P_{a_1} é adquirida pelo sistema, podemos nos perguntar se o spin 1 está para cima ou não e se os spins 2 e 3 são opostos, mas não podemos nos perguntar se o spin 2 está para cima, pois esta não é uma propriedade compatível com as propriedades esenciais assumidas.

O segundo critério é de caracter epistemológico: Este critério é adicionado para atualizar o resultado do primeiro critério, pois uma vez que sabemos que um evento aconteceu, e identificamos suas propriedades esenciais, podemos proceder a atualizar a informação desta medida. Isto é, qual de fato de todas as possibilidades é a escolhida. Se, por exemplo, o sistema adquire a propriedade específica P_a a matriz de densidade resulta:

$$\rho(T) \Rightarrow \frac{P_{a_n} \rho P_{a_n}}{Tr(P_{a_n} \rho)}. \tag{62}$$

 DOI: https://doi.org/10.1590/1806-9126-RBEF-2021-0384

Uma forma simples de entender este segundo critério é imaginar um experimento com uma moeda. Se jogamos uma moeda as probabilidades podem ser 1/2 que resulte cara e 1/2 que resulte coroa, o critério anterior consiste em atualizar a informação depois que verificamos o resultado de fato: Resulta cara ou resulta coroa.

Para ver como se aplica a interpretação de Montevidéu para sistemas quânticos, Gambini e coautores, têm estudado alguns sistemas bem conhecidos da teoria da decoerência. Por exemplo, eles demonstraram como se pode aplicar a nova interpretação para sistemas simples do tipo spin-spin ou para sistemas do tipo spin-bóson. No presente trabalho vamos apresentar de forma qualitativa e resumida o caso spin-spin.

O caso spin-spin foi um dos primeiros sistemas de decoerência estudados, como mencionamos anteriormente, pois se refere ao sistema introduzido por Zurek em seus seminais artigos [26, 27]. Para nosso objetivo é conveniente modificar um pouco o sistema original de Zurek. Gambini e coautores assumem o sistema spin-spin da forma: Imaginemos que temos um sistema S constítuido por um spin central interagindo com algum spin k do ambiente A, composto de N spins. Vamos a supor que o spin central está dentro de uma cavidade, onde tem um campo magnético uniforme na direção z. Os spins do ambiente entram um de cada vez dentro da cavidade e interagem com o spin central para depois sair da cavidade e seguir sua trajetória. [50].

Para este sistema Gambini e coautores assumem um hamiltoniano de interação definido pela expressão [50]:

$$H^k_{int} = \hbar f_k(\sigma_x\sigma^k_x + \sigma_y\sigma^k_y + \sigma_z\sigma^k_z), \tag{63}$$

onde $\hbar f_k$ determinam a magnitude do acoplamento e consideramos os momentos magnéticos do spin do sistema como $\hbar\gamma_1$ e dos spins do ambiente como $\hbar\gamma_2$. O hamiltoniano livre correspondendo a um campo magnético externo na direção z quando o k-ésimo spin do ambiente está em interação com o spin central, que representa o sistema, pode ser escrito na forma:

$$H^k_0 = \hbar\gamma_1 B\sigma_z + \hbar\gamma_1 B\sigma^k_z. \tag{64}$$

Sendo que B representa a magnitude do campo magnético na direção z. Introduzir um campo magnético permite definir uma base ponteiro, nos autoestados de σ_z, e é o elemento principal que diferencia o sistema spin-spin modificado do original proposto por Zurek.

Por outro lado, o sistema original de Zurek tem sido intensamente pesquisado na literatura, por exemplo, Paz e Zurek [52] fazem um estudo detalhado dos mecanismos de seleção da base ponteiro. Também o artigo de D'Espangnat [32] conseguiu definir um observável global para o sistema original spin-spin de Zurek. Este observável global pode ser usado para distinguir entre estados produzidos por misturas estatísticas perfeitas, via um mecanismo de decoerência ambiental, de estados produzidos por um mecanismo de colapso. Esta aproximação de D'Espagnat tem sido estendida para a interpretação de Montevidéu usando o modelo modificado de spin-spin [50, 51]. O observável global D'Espagnat pode ser definido da forma [32]:

$$M = \sigma_x \otimes^N_k \sigma^k_x, \tag{65}$$

onde σ_x e σ^k_x são os observáveis de spin na direção x para o spin central e para o k-ésimo spin do ambiente respectivamente. Usando este observável se pode verificar, para o sistema original de Zurek, a seguinte regra de comutação [32]:

$$[M, H] = 0, \tag{66}$$

onde H representa o hamiltoniano original de Zurek,[3] sendo a grandeza M uma grandeza conservada. Se esta grandeza é conhecida no estado inicial ela permanece com o mesmo valor durante a evolução do sistema. Desta forma, pode-se usar o estado inicial do sistema para determinar o observável global mostrando que resulta nulo. Por outro lado, para estender o uso deste observável global para o caso do sistema spin-spin modificado podemos usar a equação master, tipo Lindblad, para introduzir a decoerência devido ao relógio realista. Se fazemos todos estes cálculos é possível mostrar que o valor médio do observável de D'Espagnat resulta similar ao determinado usando o modelo original de Zurek, salvo algumas modificações devidas ao campo magnético introduzido e a um fator de decaimento exponencial que se deve à decoerência introduzida pelo uso do tempo físico. Se denominamos por, D, este fator de decaimento os cálculos mostram que [50]:

$$D = e^{-4NB^2(\gamma_1-\gamma_2)^2 T^{4/3}_{Planck}\tau^{2/3}} = e^{-K}, \tag{67}$$

onde τ representa o tempo de interação do k-ésimo spin do ambiente com o spin do sistema e N é o número de partículas do processo. Para obter um resultado mais expressivo resulta importante considerar condições complementares: o campo magnético deve ser maior que o acoplamento f_k para garantizar o domínio da base ponteiro. Também f_k deve ser acotada e a distância de máxima aproximação entre o k-ésimo spin do ambiente e o spin do sistema deve ser maior que a incerteza mínima introduzida pela medida do tempo. Gambini e coautores mostraram que a dispersão mínima pode ser escrita como $\Delta x = \sqrt{\frac{\hbar T}{m}}$. Então, a distância de aproximação d deve satisfazer: $d > \Delta x$. Com estas condições podemos mostrar que [50, 51]:

$$K \gg \frac{4N^5\hbar^{20/3}T^{4/3}_{planck}}{m^4\mu^{8/3}(\hbar\gamma_1\hbar\gamma_2)^{8/3}}. \tag{68}$$

Como podemos observar se K toma valores grandes o valor médio de M vai a zero e portanto não permitiria

[3] No sistema original de Zurek o hamiltoniano de interação é dado pela expressão: $H = \hbar\sum g_k\sigma_z \otimes \sigma^k_z$, onde g_k é uma constante de acoplamento.

distinguir entre uma mistura estatística e um processo de colapso. Por isso, consideramos se é possível determinar valores pequenos para $K \leq 1$ e desta forma verificar se o resultado se afasta de zero. Desta maneira, podemos usar este critério para definir a indecidibilidade para o sistema. Fazendo os cálculos se obtém que [50]:

$$m(\hbar\gamma_1\hbar\gamma_2)^{2/3} \gg \frac{4N^{5/4}\hbar^{5/3}T_{Planck}^{1/3}}{\mu^{2/3}}. \tag{69}$$

Por exemplo, se consideramos o spin central como um próton e os spins do ambiente como nêutrons obtemos a condição: $10^6 \gg N^{5/4}$, Esta condição não se cumple para ambientes pequenos com $N = 10^5$. Como conseguência, verificamos que este observável não nos permite distinguir entre uma mistura estatística ou um processo de colapso.

A todo isto devemos adicionar os erros nas medidas fundamentais. Para o caso do modelo spin-spin medidas do valor médio de M podem ser feitas por colocar um aparelho de Stern-Gerlach na saída da cavidade e medir para cada spin k, que sai da cavidade, a variação na sua direção e estimar a dispersão. Conseguimos escrever nosso resultado para o valor médio, deste observável global, incluindo tanto os erros na direção como o efeito do tempo físico da seguinte forma:

$$\bar{M}^{\Delta\theta} = \bar{M}e^{-K} \pm (\Delta\theta)^{2N}, \tag{70}$$

onde $\Delta\theta$ representa o erro na direção do spin k. Pode-se mostrar que para ambientes grandes $(\Delta\theta)^{2N} \geq e^{-K}$. Por exemplo assumindo a massa de Planck, temos: $e^{-K} << e^{-10^{-20}N^5}$ [50]. Portanto, o valor médio para o observável M resulta menor que o erro do observável e desta forma é impossível distinguir entre o resultado produzido por colapso ou o resultado produzido pela interpretação de Montevidéu. Na prática os dois casos são indistinguíveis experimentalmente.

Desta forma, para o modelo spin-spin modificado, se pode definir adequadamente o conceito de indecidibilidade e portanto definir um evento.

6. Conclusões

Neste trabalho, apresentamos uma discusão sobre o problema da medida na mecânica quântica. Também revisamos as principais características da teoria da decoerência induzida pelo ambiente usando, como exemplo, um sistema de dois níveis introduzido por Zurek. Utilizamos o formalismo da matriz densidade para apresentar a equação mestra, conhecida como equação de Lindblad, e o conceito de traço parcial.

Para demonstrar o uso destas ferramentas estudamos um sistema simples de decoerência que inicialmente está em um estado de superposição quântica. A solução da equação mestra para este sistema simples demonstra que o sistema evolui de seu estado de superposição para um estado de mistura estatística perfeita, que pode ser interpretado classicamente.

No entanto, se consideramos o sistema quântico e o ambiente como um sistema único. Então, este sistema pode ser considerado como um sistema fechado e sujeito a uma evolução unitária. Portanto, em princípio, o sistema deveria voltar a exibir estados de superposição quântica [31, 32]. Na prática, isto não é observado e constitui um problema para a teoria da decoerência, pelo menos desde o pronto de vista formal.

O problema da medida tem estimulado muitas interpretações ou formulações da mecânica quântica. No presente trabalho discutimos a denominada interpretação de Montevidéu. Esta interpretação está fundamentada na interpretação relacional da mecânica quântica. Nesta interpretação a medida do tempo é feita usando relógios realistas limitados pelas leis da relatividade geral e da mecânica quântica. Os autores da interpretação demonstraram que a incorporação do tempo físico constitui uma fonte de decoerência. Esta decoerência é denominada decoerência fundamental por estar associada a uma variável temporal.

Outro elemento importante da interpretação é o uso das incertezas fundamentais das diversas grandezas físicas que caracterizam um dado sistema quântico. Por exemplo, incertezas sobre as medidas de tempo, de comprimento, de direção, etc podem ser determinadas quando se utilizam as leis da relatividade e da mecânica quântica. Estas incertezas fundamentais também adicionam fontes de decoerência. Portanto, dentro da interpretação de Montevidéu o problema da decoerência ambiental sobre a volta dos estados de coerência é solucionado. Pelo menos desde o ponto de vista prático.

Outra definição central da interpretação de Montevidéu é a indecidibilidade. Esta definição constitui o critério para definir um evento. Cada vez que temos um evento se pode afirmar que temos uma medida. A ideia da indecidibilidade surge quando o resultado do formalismo da interpretação de Montevidéu é indistinguível do resultado do colapso. Os autores da interpretação consideram sua proposta como uma interpretação realista da mecânica quântica no sentido que o sistema é considerado como um sistema fechado com um mecanismo para produzir eventos.

Neste contexto, o observador na interpretação de Montevidéu é um elemento externo e não participa da produção do resultado da medida. Esta característica é um elemento importante que distingue a nova interpretação da teoria ortodoxa da mecânica quântica. No entanto, a presença do relógio durante o processo de medida é fundamental para produzir a decoerência na nova interpretação. O relógio deve ser robusto para não ser afetado consideravelmente durante o processo de medição. Mas o observador tem acesso tanto ao relógio como ao sistema e pode fazer medidas em ambos casos. A teoria de Gambini e colaboradores é baseada na escolha de um relógio que não interage com o sistema. Mas uma dada interação pode levar a um comportamento diferente e também constitui um problema em aberto da interpretação de Montevidéu.

Por outro lado, o principal problema em aberto desta interpretação[4] consiste em provar que a equação mestra, quando aplicada a um sistema quântico específico, conduz de fato a uma mistura estatística estrita. Esta mistura deve ser adequada para aplicar o critério de indecidibilidade e explicar as medidas. Uma demonstração parcial para sistemas relativamente gerais tem sido apresentada na referência [53].

Para os que procurem entender detalhes técnicos da interpretação se recomenda o artigo pedagógico escrito pelos autores da interpretação [54], onde muitos cálculos são apresentados, em particular resultados sobre a aplicação da probabilidade condicional quântica. Uma formulação axiomática também tem sido proposta por Gambini, Garcia-Pintos e Pullin [55]. Em geral, esperamos que esta revisão seja útil para estudantes de ciências físicas e permita estimular discussões em sala de aula sobre problemas atuais da mecânica quântica. Também pode ser considerado como material complementar para disciplinas de física moderna ou mecânica quântica.

Agradecimentos

A.M.V.T. Gostaria de agradecer à UFES por permitir coordenar um projeto de extensão da Pró-reitoria de extensão sobre história e filosofia da ciência. Este trabalho foi iniciado dentro deste programa. Adicionalmente, gostaria de agradecer ao professor Rodolfo Gambini da Universidad de la Republica e a L.P.Garcia-Pintos de la Maryland University por esclarecer muitas dúvidas sobre a interpretação de Montevidéu em particular sobre as implicâncias do uso de probabilidades condicionais e a definição de indecidibilidade de sua Interpretação.

Referências

[1] A.J.Leggett, Rev. Mod. Phys. **71**, S318 (1999).
[2] J.A. Wheeler e W.H. Zurek (eds), *Quantum Theory and Measurement* (Princeton University, Princeton, 1983).
[3] Z.K. Minev, Nature **570**, 200 (2019).
[4] J.S. Bell, *Speakable and Unspeakable in Quantum Mechanics: Collected Papers on Quantum Philosophy* (Cambridge University Press, Cambridge, 2004), 2 ed. revisada.
[5] W. Heisenberg, W, Zeitschr. Phys. **43**, 172 (1927).
[6] M.A. Nielsen e I.L. *Chuang, Quantum Computation and Quantum Information* (Cambridge University Press, Cambridge, 2000).
[7] G. Birkhoff e J. von Neumann, The Logic of Quantum Mechanics, The Annals of Mathematics **37**, 823 (1936).
[8] D. Bohm, Phys. Rev. **85**, 166 (1952)
[9] H. Everett, Rev. Mod. Phys. **29**, 454 (1957)
[10] C. Rovelli, International Journal of Theoretical Physics **35**, 1637 (1996).
[11] R. Gambini, R. Porto e J. Pullin, New J. Phys. **6**, 45 (2004).
[12] R. Gambini, R. Porto e J. Pullin, Gen. Rel. Grav. **39**, 1143 (2007).
[13] R. Gambini, R. Porto, S. Torterolo e J. Pullin, Phys. Rev. D **79**, 041501 (2009).
[14] W.H. Zurek, Rev. Mod. Phys. **75**, 715 (2003)
[15] M. Schlosshauer, Rev. Mod. Phys. **76**, 1267 (2005).
[16] M. Schlosshauer, Phys. Rep. **831**, 1 (2019)
[17] H.D. Zeh, Found. Phys. **1**, 69 (1970).
[18] H.D. Zeh, Found. Phys. **3**, 109 (1973).
[19] A.O. Caldeira, A. Leggett, Physica A **121**, 587 (1983).
[20] W.H. Zurek, Phys. Today **44**, 36 (1991).
[21] W.H. Zurek, Phys. Today **46**, 13 (1993).
[22] M. Brune, E. Hagley, J. Dreyer, J. Maître, A. Maali, C. Wunderlich, J.M. Raimond e S. Haroche, Phys. Rev. Lett. **77**, 4887 (1996).
[23] S. Haroche, Physics Today **51**, 36 (1998)
[24] J. von Neumann, *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics 1932* (Princeton University Press, Princeton, 1955).
[25] J. von Neumann, Göttinger Nachrichten **1**, 245 (1927).
[26] W.H. Zurek, Phys. Rev. D **24**, 1516 (1981).
[27] W.H. Zurek, Phys. Rev. D **26**, 1862 (1982).
[28] C. Cohen-Tannoudji, B. Dui e F. Laloe, *Quantum Mechanics* (Wiley-VCH, Weinheim, 1991), v. 1.
[29] G. Lindblad, Commun. Math. Phys. **48**, 119 (1976)
[30] J. Trost e K. Hornberger, Phys. Rev. Lett **103**, 023202 (2009)
[31] R. Omnes, *The interpretation of quantum mechanics* (Princeton University Press, Princeton, 1994).
[32] B. D'Espagnat, Found. Phys. **20**, 1147 (1990).
[33] M. Schlosshauer, *Decoherence and the Quantum-to-Classical Transition* (Springer, Heidelberg-Berlin, 2007).
[34] W.H. Zurek, Phil. Trans. R. Soc. A **376**, 20180107 (2018)
[35] W. Pauli, *General Principles of Quantum Mechanics* (Springer-Verlag, New York, 1980), p. 63.
[36] K. Kuchar, em: *4th Canadian conference on general relativity and relativistic astrophysics* (Winnipeg, 1991).
[37] P. Carruthers e M.M. Nieto, Rev. Mod. Phys. **40**, 411 (1968)
[38] P. Busch, em: *Time in Quantum Mechanics*, editado por J.G. Muga, R. Sala Mayato e I.L. Egusquiza (Springer-Verlag, Berlin Heildelberg, 2008), 2 ed revisada, p. 73.
[39] H. Salecker e E.P. Wigner, Phys. Rev. **109**, 571 (1958).
[40] A. Peres, Am. J. Phys. **48**, 552 (1980).
[41] D.N. Page e W.K. Wootters, Phys. Rev. D **27**, 2885 (1983).
[42] R. Gambini, R. Porto e J. Pullin, Braz. J. Phys. **35**, 266 (2005).
[43] R. Gambini e J. Pullin, Universe **6**, 236 (2020).
[44] F. Karolyhazy, Nuo. Cim. A **42**, 390 (1966).
[45] Y.J. Ng e H. van Dam, Mod. Phys. Lett. A **9**, 335 (1994).
[46] Y.J. Ng, Ann. N. Y. Acad. Sci. **755**, 579 (1995).
[47] G. Amelino-Camelia, Mod. Phys. Lett. A **9**, 3415 (1994)
[48] A. Frenkel, Found. Phys. **45**, 1561 (2015).
[49] R. Gambini e J. Pullin, J. Phys.Comm. **4**, 065008 (2020)
[50] R. Gambini, L.P. Garcia-Pintos e J. Pullin, Found. Phys. **40**, 93 (2010).

[4] Este é o principal problema segundo Gambini comunição privada.

[51] R. Gambini, L.P. Garcia-Pintos e J. Pullin, Int. J. Mod. Phys. D **20**, 909 (2011).

[52] J.P. Paz e W.H. Zurek, Phys. Rev. Lett. **82**, 5181 (1999).

[53] R. Gambini, L.P. García-Pintos e J. Pullin, Phys. Rev. A **100**, 012113 (2019).

[54] R. Gambini e J. Pullin, J. Phys. Conf. Ser. **174**, 012003 (2009).

[55] R. Gambini, L.P. García-Pintos e J. Pullin, arXiv:1002. 4209 (2006).

 DOI: https://doi.org/10.1590/1806-9126-RBEF-2021-0384