

## Artigos Gerais

# A órbita da Lua vista do Sol

(The Moon's orbit seen from the Sun)

C.E. Aguiar<sup>1</sup>, D. Baroni e C. Farina

*Instituto de Física, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, RJ, Brasil*

Recebido em 31/3/2009; Aceito em 5/6/2009; Publicado em 18/2/2010

O movimento da Lua tem aspectos pouco intuitivos quando observado de um referencial fixo no Sol. Existem muitas concepções errôneas sobre esse movimento, encontradas em vários textos de referência e aceitas pela maioria das pessoas como parte do senso comum. Neste trabalho nós discutimos porque as noções usuais sobre a trajetória da Lua em torno do Sol estão erradas, e apresentamos uma descrição simples da geometria da órbita lunar. As órbitas dos demais satélites planetários do sistema solar também são analisadas.

**Palavras-chave:** ensino de física, movimento orbital, concepções intuitivas.

The trajectory of the Moon has a nonintuitive aspect when observed from the Sun. Misconceptions about this motion are widespread and found even in textbooks. In this work we discuss what is wrong with the common sense notions about the trajectory of the Moon around the Sun, and investigate how pervasive these notions are. We also present a simple description of the geometry of the lunar orbit as seen from the Sun and find that the trajectory of the Moon is quite exceptional among the satellites in the solar system.

**Keywords:** physics education, orbital motion, misconceptions.

## 1. Introdução

A órbita da Lua apresenta um aspecto surpreendente quando vista de um referencial fixo no Sol. A maioria das pessoas parece ter uma noção intuitiva sobre a forma geométrica dessa órbita, provavelmente formada por analogia com problemas de natureza semelhante. Como veremos, tais noções são freqüentemente incorretas. Uma possível origem para o erro é que a idéia usual de satélite enfatiza naturalmente a força que a Terra exerce sobre a Lua, tendendo a ignorar o papel da interação Sol-Lua. O problema é que o módulo da força Sol-Lua é bem maior que o da força Terra-Lua. Isso impõe restrições à forma geométrica que a trajetória da Lua pode apresentar quando observada do Sol, dando à órbita neste referencial um aspecto que, para muitos, é surpreendente e pouco intuitivo. Nós verificamos isso realizando uma pequena “pesquisa de opinião” entre professores e estudantes de disciplinas científicas. Os resultados mostraram que a grande maioria dos entrevistados tinha uma idéia qualitativamente errônea a respeito da órbita da Lua vista do Sol. O mais curioso é que o mesmo equívoco pode ser encontrado em livros-texto e enciclopédias bem conhecidos.

Essa questão já foi abordada anteriormente. Há um interessante artigo de Antonio Teixeira Jr. [1] que discute a trajetória da Lua vista do Sol, aponta fontes

bibliográficas contendo erros a esse respeito e propõe atividades sobre o tema para sala de aula.

No presente trabalho nós introduzimos um modelo cinemático que descreve de maneira simples o movimento de um satélite visto do Sol. Com o modelo nós analisamos em que condições a órbita do satélite terá o aspecto pouco intuitivo apresentado pela Lua. Mostramos que a grande maioria dos 162 satélites planetários do sistema solar descrevem órbitas que são qualitativamente diferentes da seguida pela Lua. Observamos também que a geometria dessas órbitas tem uma distribuição estatística curiosa. O modelo cinemático foi implementado em uma simulação computacional com a qual podemos desenhar a órbita do satélite e estudar a sua forma. A simulação permite não apenas visualizar a órbita “real” da Lua, mas, principalmente, modificá-la de modo a realçar os aspectos que a tornam pouco intuitiva.

O artigo está organizado da seguinte maneira. Na seção 2 discutimos as forças que agem sobre a Lua e seu papel na definição da forma geométrica da órbita. Na seção 3 apontamos erros típicos sobre o movimento lunar encontrados na literatura e nas concepções de professores e estudantes. O modelo cinemático que utilizamos para descrever as órbitas planetárias é introduzido na seção 4, onde o movimento da Lua é com-

<sup>1</sup>E-mail: carlos@if.ufrj.br.

parado ao dos outros satélites no sistema solar. Na seção 5, a geometria da órbita da Lua é analisada em detalhe. Na seção 6 veremos como erros semelhantes aos cometidos sobre a órbita da Lua são encontrados em outros contextos. Alguns comentários e observações finais estão na seção 7.

## 2. A curvatura da órbita lunar

As principais forças que atuam sobre a Lua são as atrações gravitacionais da Terra e do Sol. O módulo da força que a Terra exerce sobre a Lua pode ser estimado tomando como base a distância média Terra-Lua,  $r = 3,84 \times 10^8$  m. As variações em torno dessa média são pequenas, menores que 6% (no apogeu a distância é  $4,06 \times 10^8$  m e no perigeu ela é  $3,63 \times 10^8$  m). A força que a Terra faz sobre a Lua é, então, aproximadamente

$$F_{TL} = G \frac{M_T M_L}{r^2} = 2,0 \times 10^{20} \text{ N}. \quad (1)$$

O módulo da força que o Sol exerce sobre a Lua pode ser calculado de maneira semelhante. A distância Terra-Lua é muito menor que a distância Terra-Sol; é menor até que a diferença entre o afélio e periélio terrestres. Com um erro inferior a 2%, podemos aproximar a distância Sol-Lua pela distância média Sol-Terra,  $R = 1,50 \times 10^{11}$  m. Assim, a força que o Sol faz sobre a Lua é, aproximadamente,

$$F_{SL} = G \frac{M_S M_L}{R^2} = 4,4 \times 10^{20} \text{ N}. \quad (2)$$

A comparação dos valores obtidos em (1) e (2) leva a uma conclusão surpreendente: a força que o Sol faz sobre a Lua é *maior* que a força que a Terra faz sobre a Lua. A diferença é tão grande,  $F_{SL} \simeq 2F_{TL}$ , que as aproximações feitas no cálculo das forças não comprometem a comparação. Em particular, isso significa que a força resultante aponta na direção do Sol quando a Lua está entre a Terra e o Sol (veja a Fig. 1).

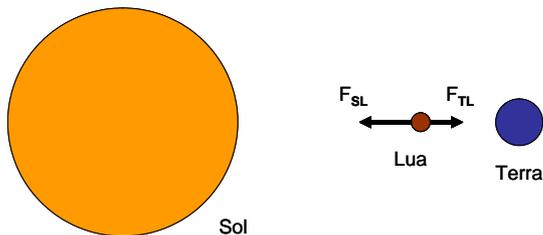


Figura 1 - Forças sobre a Lua quando ela está entre a Terra e o Sol. As distâncias e tamanhos não estão em escala.

O fato da força resultante apontar para o Sol tem uma consequência importante: quando a Lua passa entre a Terra e o Sol, a curvatura de sua trajetória deve estar voltada para o Sol, como mostra a Fig. 2. Esse resultado contraria a intuição de muitas pessoas: como veremos na próxima seção, a maioria parece acreditar

que a trajetória da Lua tem formas incompatíveis com a Fig. 2. Um motivo para isso é que, em geral, acreditamos que a força Terra-Lua seja muito maior que a força Sol-Lua, algo que já vimos ser falso. Outra razão é que é difícil entender como a Lua pode girar em torno da Terra mantendo a curvatura de sua trajetória sempre voltada para o Sol.

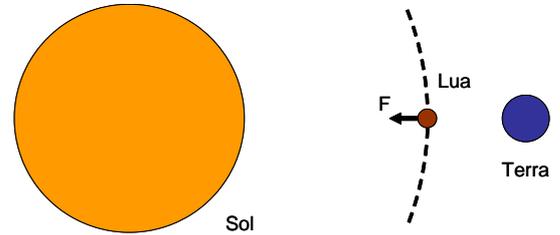


Figura 2 - Curvatura da trajetória da Lua quando ela está entre a Terra e o Sol.

## 3. Noções errôneas sobre a órbita da Lua vista do Sol

A forma da órbita da Lua vista de um referencial fixo no Sol não é um assunto geralmente abordado em livros. Quando isso ocorre, freqüentemente encontramos representações incorretas da trajetória. Um exemplo está no livro de Alonso e Finn [2], bem conhecido por alunos e professores de física. No capítulo sobre cinemática, ao falar sobre referenciais ele exhibe uma trajetória semelhante à mostrada na Fig. 3.

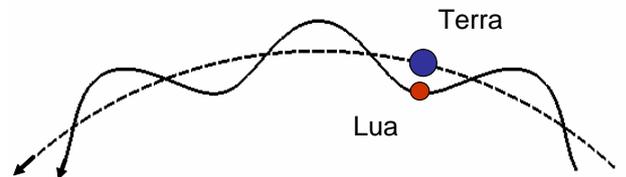


Figura 3 - Representação incorreta da órbita da Lua vista do Sol. Figuras semelhantes são encontradas em livros [2] e enciclopédias [3].

A órbita esboçada na Fig. 3 não está de acordo com o que vimos na seção anterior: nos pontos em que a Lua passa entre a Terra e o Sol, a curvatura está erroneamente voltada para a Terra. Problemas semelhantes podem ser encontrados até em publicações dedicadas à Astronomia. A representação da órbita da Lua que está no *Larousse Astronomy* [3] é semelhante à mostrada na Fig. 3. Mais exemplos de publicações que tratam da órbita da Lua de maneira equivocada podem ser encontrados em [1].

Idéias errôneas sobre a órbita da Lua não são encontradas apenas em livros-texto ou enciclopédias. Mesmo em ambientes acadêmicos, a maioria das pessoas tem dificuldade para imaginar como seria a órbita da Lua

vista do Sol. Nós verificamos isso fazendo uma pequena pesquisa envolvendo alunos e professores de um curso superior de física. Também foram consultados professores de física, matemática, química e biologia em atividade no ensino médio. O número total de participantes foi 180. A questão apresentada está na Fig. 4.

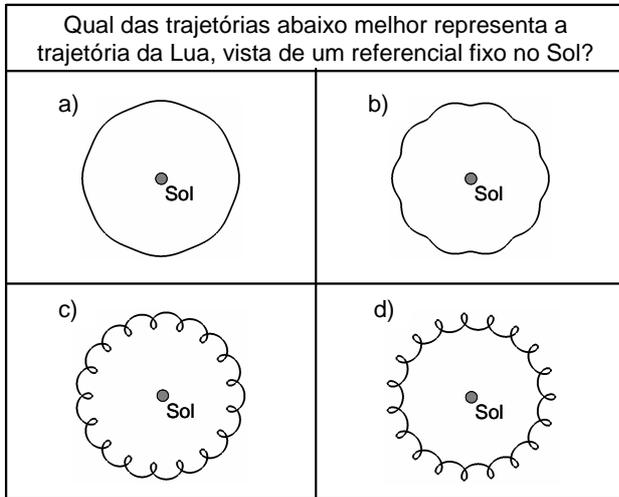


Figura 4 - Questão sobre a órbita da Lua vista do Sol.

Com o que vimos na seção anterior, sabemos que as opções B, C e D são incorretas, pois em nenhuma delas a curvatura da órbita está sempre voltada para o Sol. A resposta certa é a opção A. A Fig. 5 mostra a distribuição das respostas. Menos de 15% estavam corretas.

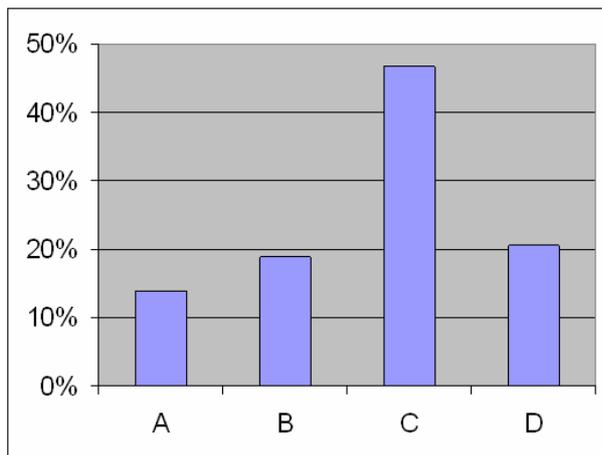


Figura 5 - Distribuição das respostas à questão sobre a órbita da Lua.

A mesma questão foi apresentada a 129 professores de português, geografia e história, todos do ensino médio. Curiosamente, a taxa de acerto foi maior nesse caso: 22% deles marcaram a opção A.

#### 4. Modelo cinemático da órbita da Lua

Como vimos, muitas pessoas (incluindo alguns autores de livros) parecem ter idéias errôneas sobre como a Lua se move em torno do Sol. Um dos motivos para isso é a dificuldade para se imaginar como a Lua pode girar em torno da Terra e, ao mesmo tempo, ter uma trajetória que sempre se curva na direção do Sol. Para estudar que tipo de movimento é esse, vamos discutir nesta seção um modelo aproximado da trajetória da Lua que permite obter resultados analíticos simples.

O ponto de partida do modelo é a aproximação de que os movimentos da Terra em torno do Sol e da Lua em torno da Terra sejam circulares e uniformes. Esta é uma boa aproximação, já que ambas as órbitas possuem excentricidades muito pequenas. Também supomos que todos os movimentos ocorram em um mesmo plano — a órbita da Lua em torno da Terra está pouco inclinada (apenas uns 6°) em relação à órbita da Terra em torno do Sol, e desprezaremos esta inclinação. Com isso, os parâmetros do modelo são o raio e frequência angular da órbita da Terra ( $R$  e  $\Omega$ ) e da órbita da Lua ( $r$  e  $\omega$ ). O movimento da Lua visto do Sol é, então, a composição de dois movimentos circulares uniformes, que podemos representar, sem perda de generalidade, por

$$\begin{aligned} x &= R \cos(\Omega t) + r \cos(\omega t) \\ y &= R \sin(\Omega t) + r \sin(\omega t) \end{aligned} \quad (3)$$

Os parâmetros  $R$ ,  $\Omega$ ,  $r$ ,  $\omega$  não são independentes, eles estão relacionados pela lei da gravitação. Para o sistema Terra-Sol temos

$$GM_S = \Omega^2 R^3, \quad (4)$$

e para o sistema Terra-Lua,

$$GM_T = \omega^2 r^3. \quad (5)$$

Eliminando a constante gravitacional  $G$  nas equações acima chegamos à relação

$$\left(\frac{\omega}{\Omega}\right)^2 \left(\frac{r}{R}\right)^3 = \frac{M_T}{M_S}. \quad (6)$$

Deve ser enfatizado que a relação (6) é apenas uma aproximação, em que o sistema de três corpos Sol-Terra-Lua é tratado como dois sistemas independentes de dois corpos: Sol-Terra e Terra-Lua. Nosso modelo “cinemático” está todo baseado nessa aproximação, que simplifica enormemente a análise do problema.

Com esse modelo podemos estudar em que condições a órbita da Lua terá a curvatura voltada para o Sol. Para que isso aconteça, o vetor aceleração da Lua (no referencial do Sol),  $\mathbf{a}$ , deve ser tal que

$$\mathbf{a}(t) \cdot \mathbf{r}(t) < 0 \quad (7)$$

onde  $\mathbf{r}(t)$  é a posição da Lua em relação ao Sol. Das equações de movimento (3), podemos obter a aceleração  $\mathbf{a}(t)$ . Substituindo o resultado na Eq. (7) encontramos

$$\Omega^2 R^2 + \omega^2 r^2 + (\Omega^2 + \omega^2) Rr \cos(\Omega t - \omega t) > 0. \quad (8)$$

A desigualdade (8) só será válida para todo instante  $t$  se

$$\Omega^2 R^2 + \omega^2 r^2 - (\Omega^2 + \omega^2) Rr > 0, \quad (9)$$

que é equivalente a

$$\Omega^2 R(R - r) > \omega^2 r(R - r). \quad (10)$$

Como  $R > r$ , a desigualdade acima reduz-se a

$$\Omega^2 R > \omega^2 r. \quad (11)$$

Combinando as Eqs. (6) e (11) encontramos que a curvatura da órbita lunar estará sempre voltada para o Sol se

$$r > R \sqrt{\frac{M_T}{M_S}}. \quad (12)$$

É conveniente definir o *raio limite* que separa as trajetórias “côncavas” e “convexas”,

$$r_0 = R \sqrt{\frac{M_T}{M_S}}, \quad (13)$$

de modo que a condição (12) pode ser escrita como  $r > r_0$ .

Para a Terra, o raio limite é  $r_0 = 2,6 \times 10^8$  m. Como o raio (médio) da órbita lunar é  $r = 3,8 \times 10^8$  m, vemos que  $r > r_0$ , ou seja, a curvatura da órbita da Lua está sempre voltada para o Sol.

É interessante estudar o que acontece com os satélites dos outros planetas. A Tabela 1 mostra os valores de  $r_0$  para os 8 planetas do sistema solar (já rebaixamos Plutão). O número de satélites de cada planeta e quantos têm órbitas com semieixo maior  $r > r_0$  também estão mostrados na tabela. Podemos ver que, dos 162 satélites planetários existentes no sistema solar, apenas 10 têm órbitas com  $r > r_0$ . Órbitas como a da Lua são muito raras.

Planeta	$r_0$ (m)	Satélites	Satélites com $r > r_0$
Mercúrio	$2,3 \times 10^7$	0	—
Vênus	$1,7 \times 10^8$	0	—
Terra	$2,6 \times 10^8$	1	1
Marte	$1,3 \times 10^8$	2	0
Júpiter	$2,4 \times 10^{10}$	63	5
Saturno	$2,4 \times 10^{10}$	56	1
Urano	$1,9 \times 10^{10}$	27	1
Netuno	$3,2 \times 10^{10}$	13	2

Tabela 1 - Os planetas do sistema solar: raio limite  $r_0$ , número de satélites, e número de satélites em órbitas com semieixo maior  $r$  superior a  $r_0$ .

Um resultado ainda mais interessante surge quando comparamos as distâncias dos satélites aos planetas, usando o raio limite  $r_0$  (de cada planeta) como padrão. O histograma da Fig. 6 mostra como os valores de  $r/r_0$  estão distribuídos entre os 162 satélites do sistema solar.

Dois aspectos da distribuição chamam a atenção: i) a grande concentração de satélites com  $0,7 < r/r_0 < 1$  (76 dos 162 satélites estão nessa faixa) e ii) a queda abrupta observada em  $r \simeq r_0$ . A grande maioria dos satélites com  $r/r_0 > 0,7$  tem órbitas retrógradas (a Lua é novamente uma exceção). Não conhecemos a explicação para esses aspectos curiosos. É digno de nota, ainda, que Lua seja o satélite com o segundo maior valor de  $r/r_0$  (1,48). Ela só perde para um satélite de Netuno, *S/2002N4*, que tem  $r/r_0 = 1,50$ .

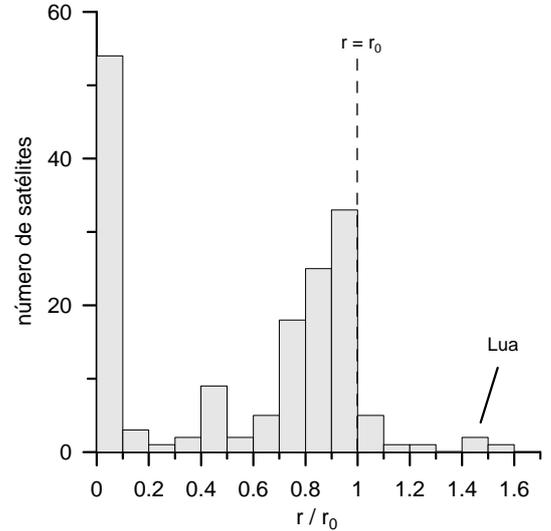


Figura 6 - Distribuição de  $r/r_0$  para os satélites do sistema solar.

## 5. A forma geométrica da órbita da Lua

Não é fácil imaginar como é a trajetória da Lua quando vista do Sol. A idéia de que a curvatura da órbita deve estar sempre voltada para o Sol parece difícil de conciliar com o fato de que Lua gira em torno da Terra. O modelo cinemático que discutimos na seção anterior pode ajudar a esclarecer a situação. Para isso, implementamos o modelo em uma simulação computacional desenvolvida no *Modellus*, um programa de modelagem matemática desenvolvido para o ensino médio [4–7]. O modelo usado está mostrado na Fig. 7, e é basicamente o movimento definido pelas Eqs. (3). Há um detalhe importante, entretanto: as unidades que usamos no modelo computacional são tais que  $R = 1$  e  $\Omega = 1$ . Nessas unidades, a frequência angular da Lua vale  $\omega = 13,4$  e o raio da órbita lunar é  $r = 0,00256$ . Em outras palavras, em um ano a Lua dá aproximadamente 13 voltas em torno da Terra, e a distância Terra-Lua é cerca de 400 vezes menor que a distância Terra-Sol. O último resultado acarreta que, se desenharmos o sistema Terra-Lua-Sol em uma mesma escala, as variações de posição da Lua em relação à Terra não serão visíveis e a órbita da Lua vista do Sol se confundirá com a da Terra. A simulação no *Modellus* mostra isso: na Fig. 8(a) está a órbita da Lua em torno do Sol e ela parece indistinguível de um círculo (a órbita da Terra).

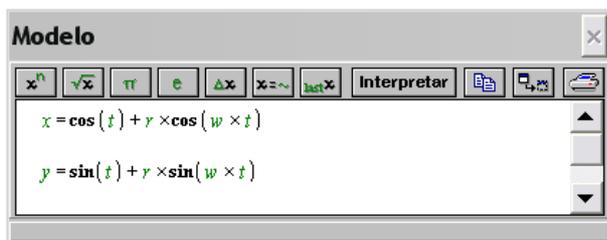


Figura 7 - Modelo da órbita lunar no *Modellus*.

Nós sabemos, pela própria construção do modelo, que a órbita da Lua não é circular. Isso fica evidente quando estudamos o comportamento do vetor aceleração. Usando os recursos gráficos do *Modellus*, podemos mostrar a aceleração **a** em diversos pontos da trajetória. O resultado está na Fig. 8(b). Vemos que o movimento da Lua tem pontos de alta aceleração intercalados com pontos de baixa aceleração. Nos primeiros, a Terra está entre a Lua e o Sol; nos últimos, a Lua está entre a Terra e o Sol. Isso significa que a trajetória da Lua alterna pontos de alta e baixa curvatura — ela se assemelha a um polígono com vértices e lados arredondados.

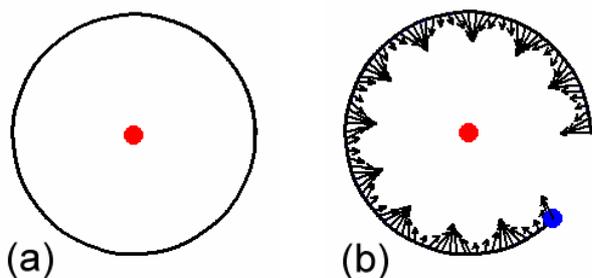


Figura 8 - (a) Órbita da Lua em torno do Sol. (b) Vetor aceleração ao longo da órbita.

O aspecto “poligonal” da órbita lunar ficaria acentuado se a sua distância à Terra fosse igual ao raio limite  $r_0$  que discutimos na seção 4. Nesse caso a aceleração seria nula quando a Lua estivesse entre a Terra e o Sol e, portanto, na vizinhança desse ponto a trajetória seria aproximadamente uma reta. A Fig. 9 mostra essa trajetória, obtida tomando  $r = 1/\omega^2$  na simulação do *Modellus* (esse é o raio limite  $r_0$  nas unidades do programa; veja a Eq. (11)). Para ter uma órbita fechada, tomamos  $\omega = 13$  em vez de 13,4.

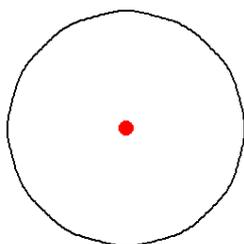


Figura 9 - Órbita limite para  $\omega = 13$ .

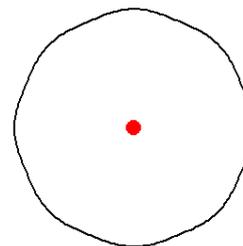


Figura 10 - Órbita limite para  $\omega = 9$ .

Ainda é difícil perceber os pontos de alta e baixa curvatura da órbita mostrada na Fig. 9. A geometria característica das órbitas limite fica mais visível se considerarmos valores menores da frequência  $\omega$ , ou seja, maiores valores de  $r$ . A Fig. 10 mostra a órbita limite para  $\omega = 9$ ; podemos agora notar claramente o aspecto “poligonal” a que nos referimos: a órbita se assemelha a um octógono (número de lados  $n = \omega - 1 = 8$ ). Para  $\omega = 7$  temos o “hexágono” mostrado na Fig. 11. Exemplos de órbitas “pentagonais”, “quadradas” e “triangulares” também estão na Fig. 11.

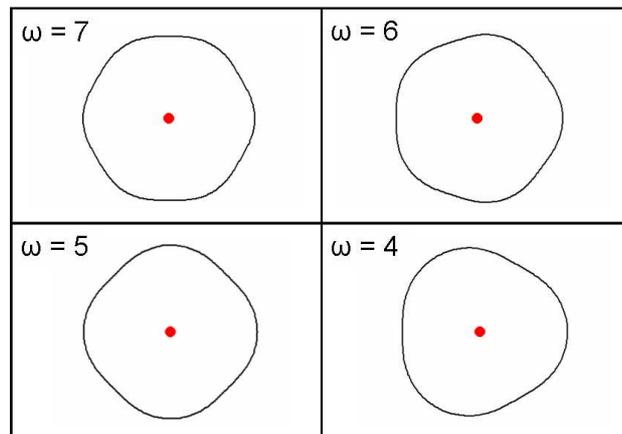


Figura 11 - Órbitas limite “poligonais” para diversos valores de  $\omega$ .

## 6. Órbitas em potenciais centrais atrativos

O equívoco sobre a órbita da Lua que discutimos nas seções anteriores pode aparecer, disfarçado, em diferentes situações. Um caso comum é o do movimento sob a ação de forças centrais atrativas. A Fig. 12 mostra a órbita de uma partícula submetida a uma força  $F = -k r^n$  (com  $k > 0$ ), tal como é apresentada em um dos livros-texto mais usados nos cursos de física, o *Classical Mechanics* de H. Goldstein [8]. Podemos observar o mesmo erro cometido no caso da órbita lunar: se a força aponta sempre para o centro, a curvatura da órbita não poderia estar voltada para fora. Esse equívoco já foi bastante comentado [9–12] e não nos deteremos nele.

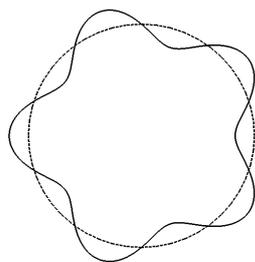


Figura 12 - Órbita em um potencial central atrativo, segundo Goldstein [8].

É interessante, entretanto, notar que Newton não cometeu esse erro. A Fig. 13 mostra parte de uma famosa carta enviada por Newton a Hooke em 1679. Nela está o que foi, provavelmente, um dos primeiros cálculos da órbita de uma partícula em um campo de força central (constante e atrativo, no caso) [11, 13]. Podemos ver que Newton esboçou a órbita corretamente, mantendo a curvatura da trajetória sempre voltada para o centro.

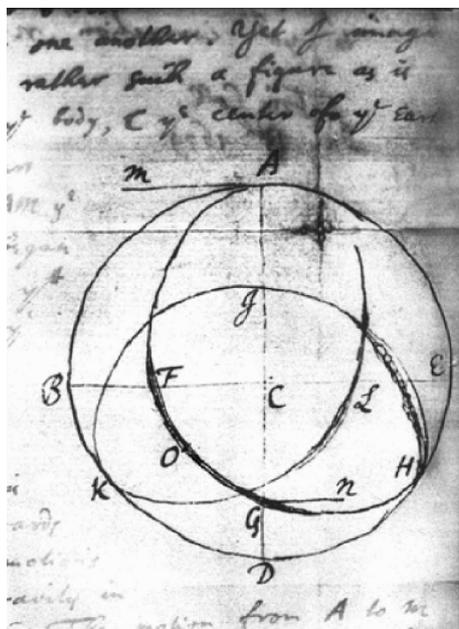


Figura 13 - Diagrama de Newton em carta a Hooke (1679).

## 7. Comentários finais

O objetivo deste trabalho foi explorar uma questão que, curiosamente, ainda tem aspectos que surpreendem muitas pessoas: a órbita da Lua. Concepções errôneas sobre como é a órbita da Lua vista do Sol parecem ser comuns, mesmo na literatura técnica. Motivos prováveis para isso são: (1) a tendência a considerar que a principal força que age sobre a Lua é a atração gravitacional da Terra; (2) os erros sobre o assunto contidos

em livros-texto e outras publicações; e (3) a dificuldade em imaginar como é possível que a Lua gire em torno da Terra e, ao mesmo tempo, tenha uma trajetória que se curve sempre para o Sol. Nós tentamos abordar esta última dificuldade usando um modelo simples (e aproximado) para a trajetória da Lua em torno do Sol. Com esse modelo, nós investigamos em que condições a órbita de um satélite tem a forma pouco intuitiva apresentada pela Lua. Vimos que a imensa maioria dos satélites planetários do sistema solar tem órbitas do tipo que as pessoas consideram “normais”. Apenas 10 satélites (em 162), entre eles a Lua, têm órbitas com a concavidade voltada sempre para o Sol. Também observamos algumas características interessantes na distribuição estatística das órbitas dos satélites do sistema solar. Finalmente, vimos que a órbita da Lua vista do Sol pode ser caracterizada aproximadamente como um “polígono” de doze lados (um dodecágono), com os lados e vértices arredondados.

## Agradecimento

Este trabalho foi parcialmente financiado pela Faperj e CNPq.

## Referências

- [1] Antonio S. Teixeira Jr., *Revista Brasileira de Ensino de Física* **2**, 15 (1980).
- [2] M. Alonso e E. Finn, *Física: Um Curso Universitário* (E. Blucher, São Paulo, 1972), vol. 1.
- [3] Ph. de la Cotardière (ed.), *Larousse Astronomy* (Hamlyn, Londres, 1987), p. 142.
- [4] <http://phoenix.sce.fct.unl.pt/modellus/>
- [5] Vitor D. Teodoro, *Modellus: Learning Physics with Mathematical Modelling*. Tese de Doutorado, Universidade Nova de Lisboa, Lisboa, 2003.
- [6] E.A. Veit e V.D. Teodoro, *Revista Brasileira de Ensino de Física* **24**, 87 (2002).
- [7] E.A. Veit, P.M. Mors e V.D. Teodoro, *Revista Brasileira de Ensino de Física* **24**, 176 (2002).
- [8] H. Goldstein, C. Poole and J. Saffo, *Classical Mechanics* (Addison-Wesley, Nova York, 2002), 3ª ed., p. 91.
- [9] M. Tiersten, *American Journal of Physics* **71**, 103 (2003).
- [10] C.P. Poole Jr., J.L. Saffo and H.A. Farach, *American Journal of Physics* **73**, 40 (2005).
- [11] M. Nauenberg, *American Journal of Physics* **73**, 340 (2005).
- [12] S. Ray and J. Shamanna, arxiv:physics/0410149.
- [13] A.R. Hall, *Isaac Newton - Adventurer in Thought* (Cambridge University Press, Nova York, 1996), p. 202-207.