

# É seguro atirar para cima? Uma análise da letalidade de projéteis subsônicos

Is it safe to shoot up? An analysis of the lethality of subsonic projectiles

Saulo Luis Lima da Silva<sup>\*1</sup>, Herman Fialho Fumiã<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Centro Federal de Educacao Tecnologica de Minas Gerais, Departamento de Formação Geral, Nepomuceno, MG, Brasil

<sup>2</sup>Universidade do Estado de Minas Gerais, Carangola, MG, Brasil

Recebido em 13 de Setembro, 2018. Revisado em 13 de Novembro, 2018. Aceito em 15 de Novembro, 2018.

Os tiros de comemoração referem-se aos tiros dados para o alto por ocasião de celebrações festivas. Este é um hábito em países como o Afeganistão, Paquistão e algumas regiões da América Latina. Neste artigo, resolvemos o problema de projéteis com velocidade subsônica atirados para alto, considerando a resistência do ar. Com fins didáticos, traçamos um paralelo entre esse caso e aquele em que a resistência do ar é desprezada. Concluímos que mesmo projéteis de pequeno calibre podem ser letais na queda, apesar da diminuição da velocidade e da energia cinética.

**Palavras-chave:** projéteis, letalidade, força de arrasto, resistência do ar

Celebratory gunfire is the shooting of a firearm into the air in celebration. This is common in countries as Afghanistan, Pakistan and regions of Latin American. In this article, we have solved the problem of a projectile with subsonic speed shot up, considering the air resistance. For didactic purposes, we draw a parallel between the case with and without air resistance. We conclude that even small-caliber projectile can be lethal when falling, a despite the decrease in speed and kinetics energy.

**Keywords:** bullet, lethality, drag, air resistance

## 1. Introdução

Ocasionalmente vemos celebrações em filmes ou noticiários que envolvem pessoas atirando para o alto. Esse é um hábito culturalmente aceito em diversas regiões do mundo como o Afeganistão, Paquistão, Índia e algumas partes da América Latina [1]. Apesar da sua associação com situações festivas, como celebrações do Ano Novo, Natal, casamentos, e etc., seria essa uma prática segura para as pessoas presentes nessas comemorações ou próximas das mesmas?

Se nos esquecermos por um momento da expressão “despreze a resistência do ar”, tão utilizada nos exercícios de mecânica básica, a resposta será óbvia; a velocidade da bala na descida será a mesma que na subida e, consequentemente, as pessoas atingidas podem morrer. Contudo, como a resistência do ar aumenta com a velocidade e projéteis de armas movidos a expansão de gases possuem velocidades elevadas, a resistência do ar não pode ser desprezada nessas circunstâncias nem mesmo como aproximação.

Nesse artigo, resolvemos o problema de projéteis subsônicos atirados na vertical considerando a resistência do ar e analisamos a questão da possível letalidade desse projétil nessa situação. Essa discussão também possui

um forte apelo didático, uma vez que a resistência do ar é geralmente negligenciada nos cursos de mecânica básica. Por esse motivo, traçamos alguns paralelos entre os resultados apresentados ao se considerar e ao se desprezar a resistência do ar.

O trabalho está estruturado da seguinte forma: na seção II apresentamos os aspectos essenciais da força de arrasto para a nossa análise. A seção III é dedicada à análise do movimento vertical, tanto ascendente quanto descendente, do projétil. Os resultados e discussões são apresentados na seção IV. Na seção V apresentamos a conclusão.

## 2. A força de arrasto

A força de arrasto sobre um corpo imerso em um fluido e que se movimenta com uma velocidade  $v$  em relação a esse fluido, pode ser descrita pela equação 1.

$$F_a = \frac{1}{2} \rho C_d A v^2, \quad (1)$$

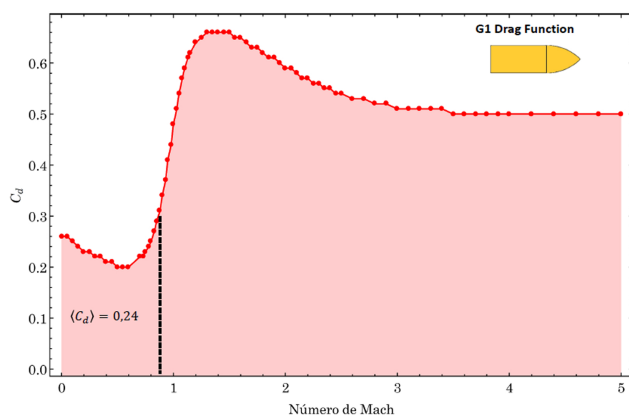
em que  $v$  é a velocidade do corpo em relação ao fluido,  $\rho$  é a densidade do fluido,  $C_d$  é o coeficiente de arrasto, e  $A$  é a área de seção transversal do corpo. Essa forma funcional é adequada apenas para velocidades situadas entre alguns poucos metros por segundo e próximas à velocidade do som.

\*Endereço de correspondência: saulolimasilva@yahoo.com.br.

A equação 1 admite como hipótese que o coeficiente de arrasto  $C_d$  é constante. Essa é uma aproximação razoável em duas condições: quando o projétil se movimenta com uma velocidade abaixo da velocidade do som no meio e para projéteis que se movimentam em velocidades supersônicas, maiores que Mach 2 [3–5]. Naturalmente, nosso tratamento não pode se aplicar a projéteis supersônicos, uma vez que nessa faixa de velocidades há grande variação no coeficiente de arrasto  $C_d$ , conforme podemos ver na (Figura 1). Portanto, nos limitaremos a projéteis subsônicos.

Projéteis trafegando a velocidades subsônicas tipicamente são aqueles atirados por revólveres e pistolas. Na Tabela 1, apresentamos a velocidade inicial  $v_0$ , ou seja, a velocidade de saída do cano da arma, para alguns calibres tipicamente utilizados em revólveres e pistolas. Também é apresentado a massa  $m$  desses projéteis.

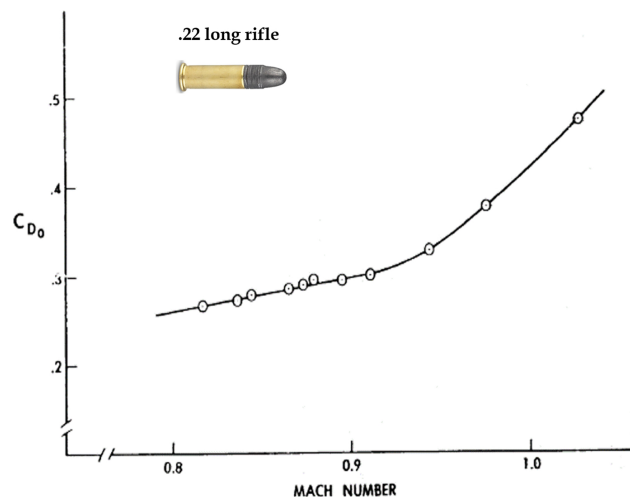
O coeficiente de arrasto  $C_d$  é função da forma do projétil. Os projéteis da Tabela 1 possuem uma forma similar àquela do modelo padrão G1 (Figura 1). Como podemos ver da Figura 1, na região subsônica destacada, o coeficiente de arrasto médio é de 0,24. Adotaremos esse valor para o coeficiente de arrasto de todos os projéteis apresentados na Tabela 1. A título de comparação, observe a Figura 2 onde observamos resultados para o comportamento do coeficiente de arrasto de um projétil calibre .22



**Figura 1:** Coeficiente de arrasto em função do número de Mach para o modelo padrão de projétil do tipo G1. Figura produzida a partir de dados obtidos em [2].

**Tabela 1:** Massa  $m$  e velocidade inicial  $v_0$  de uma seleção de projéteis de pistolas e revólveres [6].

Calibre	$m$ (g)	$v_0$ (m/s)
.22 short (5.6 mm short)	1,8	290
.22 long rifle	1,8	330
6.35 mm Browning	3,2	230
7.65 mm Browning	4,7	300
9x18 mm Police	6,1	300
7.62 mm Nagant	7,0	290
.32 Smith and Wesson	5,5	200
.38 Smith and Wesson	9,4	210
.38 Smith and Wesson special	10,2	260
.45 Automatic Colt Pistol	14,9	260



**Figura 2:** Coeficiente de arrasto em função do número de Mach para um calibre .22 long rifle. Observe que próximo de Mach 1 ocorre um grande aumento no coeficiente de arrasto. Figura retirada de [7].

long rifle como função do número de Mach. Note que os valores do coeficiente de arrasto e o formato do projétil estão em um acordo razoável com o do modelo G1.

### 3. Movimento de projéteis na vertical

No intuito de estudar o movimento de projéteis atirados para cima, na vertical, vamos dividi-lo em duas partes: a subida (vertical ascendente) e a descida (vertical descendente).

Adotamos a localização de onde o projétil sai do cano da arma como sendo a origem  $y = 0$  do nosso sistema de coordenadas e adotamos o tempo em que o projétil é atirado como  $t = 0$ .

#### 3.1. Vertical ascendente

No caso do movimento ascendente, a segunda lei de Newton nos permite escrever (em uma dimensão)

$$m \frac{dv}{dt} = -(F_d + P) = -\left(\frac{1}{2}\rho AC_d v^2 + mg\right), \quad (2)$$

onde  $m$  é a massa do projétil,  $P$  é o peso do mesmo e  $g$  é a aceleração da gravidade.

A equação (2) é separável e pode ser integrada de forma trivial. A posição e velocidade do projétil em função do tempo (tomando os outros parâmetros como constantes) no movimento ascendente do projétil são dadas, respectivamente, por:

$$y(t) = \frac{v_t^2}{g} \ln \left| \frac{\cos \left[ \frac{g}{v_t} (t_s - t) \right]}{\cos \left( \frac{gt_s}{v_t} \right)} \right|, \quad 0 \leq t \leq t_s \quad (3)$$

e

$$v(t) = v_t \tan \left[ \arctan \left( \frac{v_0}{v_t} \right) - \frac{g}{v_t} t \right], 0 \leq t \leq t_s \quad (4)$$

onde  $v_0$  é a velocidade inicial do projétil ao sair da boca do cano da arma e  $v_t$  é a velocidade atingida pelo projétil quando o peso e a força de arrasto se igualam, conhecida como *velocidade terminal*. A velocidade terminal pode ser obtida facilmente fazendo  $\mathcal{D}v_t^2 = mg$ , o que nos dá  $v_t = \sqrt{\frac{mg}{\mathcal{D}}}$ , em que  $\mathcal{D} = \frac{1}{2}\rho AC_d$ . Além disso,  $t_s$  é o tempo que o projétil leva para atingir o ponto mais alto de sua trajetória. Esse tempo pode ser obtido fazendo  $(v(t_s) = 0)$  na equação (4). Com isso, obtemos

$$t_s = \frac{v_t}{g} \arctan \left( \frac{v_0}{v_t} \right). \quad (5)$$

A altura máxima  $h_{max}$  atingida pelo projétil corresponde à posição  $y(t_s)$ . A expressão é dada por:

$$h_{max} = -\frac{v_t^2}{g} \ln \left| \cos \left( \frac{gt_s}{v_t} \right) \right|. \quad (6)$$

O balanço de energia para esse caso também é bem simples de se fazer, uma vez que a energia (cinética) do projétil ao sair da boca do cano da arma é  $k_0 = (1/2)mv_0^2$  e ao atingir o ponto mais alto de sua trajetória sua energia (potencial gravitacional) será  $^1 U_g = mgh_{max}$ . Esses resultados nos permitem calcular facilmente a energia mecânica dissipada pela força não conservativa (a força de arrasto) durante a subida  $\Delta E_{m\ sub} = k_0 - U_g$ . Contudo, mais interessante para o nosso caso é a energia mecânica dissipada durante todo o trajeto. Que pode ser obtida através de  $\Delta E_m = k_0 - k_q$ , em que  $k_q = (1/2)mv_q^2$  é a energia cinética do projétil quando chega ao solo.

### 3.2. Vertical descendente

No caso do movimento descendente, a segunda lei de Newton pode ser escrita na forma

<sup>1</sup>Estamos considerando o nível da boca do cano da arma como um referencial onde adotamos a energia potencial gravitacional como sendo nula. Salientamos que no ponto mais alto da trajetória a velocidade do projétil será nula, portanto a energia cinética e a força de arrasto também serão.

$$m \frac{dv}{dt} = F_d - mg = \frac{1}{2}\rho AC_d v^2 - mg, \quad (7)$$

de onde podemos obter a posição e velocidade do projétil em função do tempo. Fazendo a integração em (7), obtemos:

$$y(t) = h_{max} - \frac{v_t^2}{g} \ln \left[ \cosh \left( \frac{g}{v_t} (t_s - t) \right) \right], t \geq t_s \quad (8)$$

e

$$v(t) = v_t \tanh \left( \frac{g}{v_t} (t_s - t) \right), t \geq t_s. \quad (9)$$

O tempo de descida  $t_d$  é obtido por meio da equação 8 impondo a condição  $y(t_d) = 0$ . A expressão para o tempo de descida  $t_d$  é:

$$t_d = t_s - \frac{v_t}{g} \operatorname{arccosh} \left( \left| \cos \left( \frac{gt_s}{v_t} \right) \right|^{-1} \right). \quad (10)$$

## 4. Resultados e Discussões

### 4.1. Tempos de subida e descida, altura máxima e velocidades terminais e de queda

Desconsiderando a resistência do ar, os tempos de subida  $t_s$  e queda  $t_q$  para um mesmo projétil são iguais (na Tabela 2,  $t_s = t_q = t_0$ ). Contudo, a situação com resistência do ar é bem diferente. Observe na Tabela 2, por exemplo, que o tempo de queda  $t_q$  para um projétil .22 long rifle é aproximadamente 1,67 vezes maior do que o tempo de subida  $t_s$ . De fato, isso ocorre porque na subida as forças de resistência do ar e o peso estão no mesmo sentido, enquanto na descida estão em sentidos contrários.

É interessante compararmos os tempos para o caso com e sem a resistência do ar (Tabela 2). Por exemplo, para o calibre 7.65mm Browning, desconsiderando a resistência do ar, o tempo de subida ou descida  $t_0$  é de 30,6 s, o que nos dá um tempo total de 61,2 s. Quando a resistência do ar é levada em consideração, observamos que o tempo total  $t_{total}$  é de apenas 27,2 s, ou seja, o famoso despreze a resistência do ar seria tão inadequado nesse caso que

**Tabela 2:** Tempos de subida  $t_s$ , descida  $t_d$ , total  $t_{total}$  e a razão  $t_d/t_s$  para diversos projéteis considerando a resistência do ar. O tempo  $t_0$  corresponde ao tempo de subida ou descida para o caso em que a resistência do ar é ignorada.

Calibre	$t_s$ (s)	$t_d$ (s)	$t_{total}$ (s)	$t_d/t_s$	$t_0$ (s)
.22 short (5.6 mm short)	9,4	15,0	24,4	1,61	29,6
.22 long rifle	9,6	15,9	25,5	1,67	33,7
6.35 mm Browning	10,2	14,6	24,9	1,43	23,5
7.65 mm Browning	10,6	16,5	27,2	1,55	30,6
9x18 mm Police	10,3	13,9	24,1	1,36	20,4
7.62 mm Nagant	10,7	16,6	27,3	1,55	30,6
.32 Smith and Wesson	12,4	18,0	30,4	1,45	29,6
.38 Smith and Wesson	11,4	15,1	26,4	1,33	21,4
.38 Smith and Wesson special	12,5	17,4	29,8	1,39	26,5
.45 Automatic Colt Pistol	12,1	17,0	29,1	1,41	26,5

ainda estaríamos esperando a bala chegar ao ponto mais alto da trajetória com base nessa aproximação quando, na verdade, ela já estaria no chão!

Como podemos ver da Tabela 3, considerando a resistência do ar, a altura máxima  $h_{max}$  atingida por todos os projéteis é da ordem de um 1 km. Observe que os valores da altura máxima  $h_{max}$  são entre 3 e 7 vezes menores do que aqueles previstos nos casos em que a resistência do ar é desprezada ( $h_{Omax}$ ).

Os projéteis não ficam tempo o bastante em queda para atingirem a velocidade terminal  $v_t$ . Da Tabela 4, observamos que as velocidades de queda  $v_q$  estão entre 91% e 98% do valor das velocidades terminais  $v_t$  correspondentes.

Se no caso sem a resistência do ar, a energia mecânica é conservada, no caso em que a mesma é levada em conta, a situação é completamente distinta. A razão  $\Delta E_m/k_0$  calculada para os projéteis nos informa que entre 82% e 96% da energia inicial do projétil é dissipada durante o trajeto (Tabela 4).

#### 4.2. A letalidade

Comparando apenas as velocidades de saída  $v_0$  e de queda dos projéteis  $v_q$  (Tabela 4), poderíamos ser levados à conclusão de que é pouco provável a morte por projéteis que caem do céu. Ao observamos que o projétil quando chega ao solo pode ter apenas 4% da energia cinética inicial (.22 long rifle), essa conclusão pareceria ainda mais fortalecida. Contudo, essa é uma análise que ignora

um ponto fundamental: a cabeça é o principal alvo de projéteis que caem.

Os projéteis atirados diretamente contra uma pessoa podem acertar uma grande área, o que inclui regiões vitais e não-vitais. A área que um projétil em queda vertical pode acertar uma pessoa é significativamente menor, mas possui a cabeça, uma região extremamente vital, como alvo mais provável (Fig.3). De fato, em um estudo com 118 pacientes vítimas de projéteis em queda, verificou-se que 77% deles foram atingidos na cabeça. A taxa de mortalidade foi de 32%, significativamente maior do que para todos os outros casos de ferimento por tiros em geral [8].

A velocidade em que um projétil é capaz de penetrar a pele encontra-se por volta de 45m/s a 60m/s. Dessa forma, todos os projéteis analisados irão provocar esse efeito. Mais drástico do que isso é que projéteis com velocidade próximas de 60m/s já são capazes de fraturar ossos e mesmo penetrar no crânio [9]. Portanto, mesmo as armas de pequeno calibre analisadas podem ser letais para disparos verticais.

#### 5. Conclusão

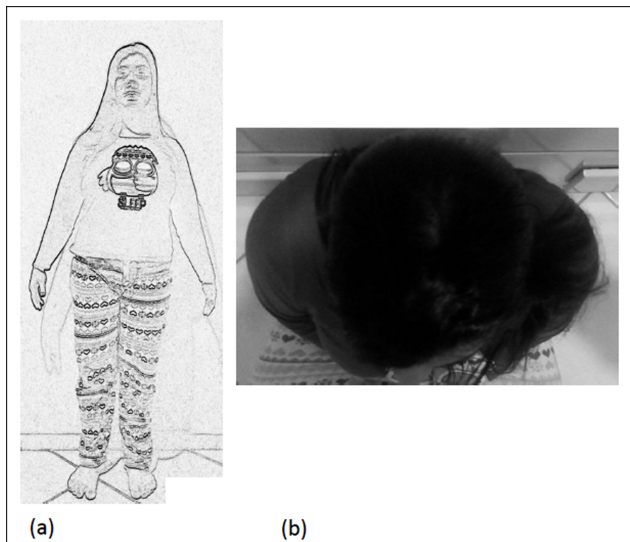
Determinamos as expressões para a posição  $y(t)$ , a velocidade  $v(t)$ , a altura máxima  $h_{max}$  e o tempo de subida  $t_s$  para o caso em que a resistência do ar é considerada. Os resultados obtidos são interessantes para se mostrar a diferença entre a situação com e sem a resistência do ar. As expressões obtidas podem ser utilizadas para se mostrar em sala de aula, por exemplo, até que ponto

**Tabela 3:** Altura máxima considerando a resistência do ar  $h_{max}$  e sem considerá-la  $h_{Omax}$ . A razão entre as alturas  $h_{Omax}/h_{max}$  é apresentada.

Calibre	$h_{max}$ (m)	$h_{Omax}$ (m)	$\frac{h_{Omax}}{h_{max}}$
.22 short (5.6 mm short)	705	4291	6,1
.22 long rifle	764	5556	7,3
6.35 mm Browning	743	2699	3,6
7.65 mm Browning	879	4592	5,2
9x18 mm Police	704	2041	2,9
7.62 mm Nagant	884	4592	5,2
.32 Smith and Wesson	1109	4291	3,9
.38 Smith and Wesson	845	2250	2,7
.38 Smith and Wesson special	1072	3449	3,2
.45 Automatic Colt Pistol	1019	3449	3,4

**Tabela 4:** Velocidade inicial  $v_0$ , de queda  $v_q$  e terminal  $v_t$  para diferentes projéteis. A razão  $\Delta E_m/k_0$  e  $v_q/v_t$  são apresentadas.

Calibre	$v_0$ (m/s)	$v_q$ (m/s)	$\frac{ \Delta E_m }{k_0}$	$v_t$ (m/s)	$\frac{v_q}{v_t}$
.22 short (5.6 mm short)	290	66,7	0,95	68,6	0,97
.22 long rifle	330	67,1	0,96	68,6	0,98
6.35 mm Browning	230	76,8	0,89	81,4	0,94
7.65 mm Browning	300	76,9	0,93	79,5	0,97
9x18 mm Police	200	79,3	0,84	86,4	0,92
7.62 mm Nagant	300	77,2	0,93	79,9	0,97
.32 Smith and Wesson	290	92,4	0,90	97,5	0,95
.38 Smith and Wesson	210	88,9	0,82	98,2	0,91
.38 Smith and Wesson special	260	95,2	0,87	102,2	0,93
.45 Automatic Colt Pistol	260	91,5	0,88	97,8	0,94



**Figura 3:** (a) Disparos em geral podem acertar regiões vitais ou não-vitais. (b) Quando em queda, a cabeça, região extremamente vital, torna-se o alvo mais provável.

a aproximação feita ao desprezar a resistência do ar é razoável.

A forma funcional consideravelmente mais complexa dessas expressões ilustra que, embora saibamos resolver o problema com a resistência do ar, o preço matemático que se paga é mais alto. Portanto, nas situações em que a aproximação de ignorarmos a resistência do ar for razoável, a facilidade de obtenção das soluções e análise das mesmas justifica o seu uso.

Para o nosso problema em específico, os resultados obtidos deixam claro que ignorar a resistência do ar não é uma opção; o valor das grandezas obtidas para os diversos projéteis destoam muito nos dois casos. Por exemplo, a energia dissipada que seria nula para o caso sem resistência do ar, chega a ser de 96% para o caso com a resistência do ar (.22 long rifle, Tabela 4).

Apesar da expressiva diminuição da velocidade dos projéteis analisados durante a queda, concluímos que a velocidade final  $v_q$  ainda é suficiente para colocar em risco a vida das pessoas atingidas. Dessa forma, os nossos resultados justificam a Portaria Interministerial nº 4.226, de 31 de dezembro de 2010, que proíbe os tiros de advertência pela Polícia Federal, Polícia Rodoviária Federal, Departamento Penitenciário Nacional e Força Nacional de Segurança Pública em razão da imprevisibilidade de seus efeitos. Não fosse o tiro para o alto potencialmente letal, mesmo aqueles de armas de pequeno calibre, tiros na vertical poderiam ser colocados como norma para tiros de advertência.

## Agradecimentos

Os autores agradecem à Oficial da Força Aérea Brasileira Ana Lúcia Bezerra Cordeiro por ter chamado e, principalmente, despertado nossa atenção para este problema.

## Referências

- [1] S.A. Ali, S. M. Tahir, A. Makhdoom, A. R. Shaikh e A. R. Siddique, Iran. Red Crescent Med. J. **17**, e26179 (2015).
- [2] R. L. McCoy, *Modern Exterior Ballistics* (Schiffer Publishing, Atglen, 2001).
- [3] C. I. Farrar e D. W. Leeming, *Military Ballistics a Basic Manual, Battlefield Weapons Systems and Technology, vol.10* (Royal Military College of Science, Shrivenham, UK, 1983).
- [4] D. G. Figueredo and A. F. Neves, “*Equações Diferenciais Aplicadas*,” (IMPA, Rio de Janeiro, 2007).
- [5] M. S. D. Cattani, “*Elementos de mecânica dos fluidos*,” (Blucher LTDA, São Paulo, 2005) 2ª ed.
- [6] B. Madea, *Handbook of Forensic Medicine*, (Wiley-Blackwell, New Jersey, 2014).
- [7] R. L. McCoy, *Aerodynamic Characteristics of Caliber. 22 Long Rifle Match Ammunition* (No. BRL-MR-3877), Army Ballistic Research Lab Aberdeen Proving Ground MD (1990).
- [8] G. J. Ordog, P. Dornhoffer, G. Ackroyd, J. Wasserberger, M. Bishop, W. Shoemaker, e S. Balasubramanium, *The Journal of trauma* **37**, 1003 (1994).
- [9] A. N. Incorvaia, D. M. Poulos, R. N. Jones e J. M. Tschirhart, *Ann. Thorac. Surg.* **83**, 283 (2007).