

Mecânica Quântica no Espaço de Fase: I. Formulação de Weyl-Wigner

(Quantum Mechanics in Phase Space: I. The Weyl-Wigner Formalism)

Marcelo A. Marchioli

Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo,

Caixa Postal 369, 13560-970 São Carlos, SP, Brasil

E-mail: marcelo_march@bol.com.br

Recebido em 01 de abril, 2002. Aceito em 03 de outubro, 2002.

Nas últimas décadas constata-se um crescente número de artigos em diversas áreas da Física dedicados a desenvolver e aplicar o formalismo de Weyl-Wigner nos mais diferentes sistemas físicos. A possibilidade de aprofundarmos os nossos conhecimentos sobre o princípio da incerteza e recuperarmos a Mecânica Clássica no limite $\hbar \rightarrow 0$, faz com que a descrição da Mecânica Quântica no espaço de fase ganhe cada vez mais adeptos. Nesse sentido, este trabalho tem por finalidade apresentar um conjunto básico de resultados que caracterizam o formalismo em questão, possibilitando ao leitor o acesso às idéias principais decorrentes deste fascinante tema.

The last decades have witnessed an ever increasing number of articles in numerous physical areas of research dedicated to develop and apply the Weyl-Wigner formalism in connection with a variety of different physical systems. The possibility of deepening our understanding of the uncertainty principle and recuperating Classical Mechanics in the $\hbar \rightarrow 0$ limit explains the increasing abundance of adepts of the phase-space description of Quantum Mechanics. In this favorable context, the present work aims at introducing a basic set of results that characterize the formalism at issue, allowing the reader to have access to the main ideas emanating from this fascinating theme.

I Introdução

O formalismo que iremos desenvolver considera essencialmente um sistema quântico constituído de uma única partícula de massa M executando um movimento unidimensional, nos quais \mathbf{Q} e \mathbf{P} são os respectivos operadores posição e momentum, e destituída de spin (movimento rotacional intrínseco). Como tais operadores satisfazem a relação de comutação $[\mathbf{Q}, \mathbf{P}] = i\hbar\mathbf{1}$, a posição e o momentum desta partícula não podem ser simultaneamente medidos (princípio de incerteza); consequentemente, não é possível definir uma distribuição de probabilidades genuína no espaço de fase associada ao operador densidade $\rho(t)$ que descreve as propriedades físicas da partícula. Nesse sentido, a representação da Mecânica Quântica no espaço de fase é problemática e nada trivial. Entretanto, tais dificuldades foram superadas com o ferramental matemático desenvolvido por Weyl-Wigner [1, 2] em que a função distribuição de Wigner desempenha um papel crucial: esta possui propriedades matemáticas que permitem caracterizá-la como uma pseudo-distribuição (ou quase-distribuição), dentre as quais o fato de poder assumir valores nega-

tivos para determinados sistemas quânticos (o que não é permitido no sentido clássico da definição de distribuições de probabilidades). Além disso, a função de Wigner permite estabelecer conexões entre a Mecânica Clássica e a Mecânica Quântica através do limite $\hbar \rightarrow 0$, procedimento esse muito utilizado no estudo de sistemas caóticos semiclássicos [3, 4]. De fato, as aplicações deste formalismo são inúmeras e se estendem por diferentes áreas da Física [5], sendo que a transição para sistemas tridimensionais e a inclusão do spin podem ser feitas sem mudanças conceituais.

Nos últimos anos, belíssimos experimentos envolvendo a reconstrução de alguns estados do campo eletromagnético [6] ou mesmo de estados associados ao movimento do centro-de-massa de íons ${}^9\text{Be}^+$ aprisionados em uma armadilha de Paul [7] foram realizados com sucesso e as respectivas reconstruções feitas por intermédio da função de Wigner. Posteriormente, algumas propostas teóricas para a medida direta da função de Wigner também foram apresentadas [8, 9] e correspondem a experimentos de eletrodinâmica quântica de cavidades e íons aprisionados. Motivados pelos recentes resultados teóricos e experimentais, neste primeiro

trabalho vamos nos ater somente em realizar um estudo preliminar da formulação de Weyl-Wigner da Mecânica Quântica no espaço de fase, visando a compilação de um material básico que permita ao leitor aprofundar-se no tema ou mesmo servir como um complemento às disciplinas dos cursos de pós-graduação em Física, satisfazendo assim os diferentes programas existentes no país.

Os tópicos abordados estão dispostos como segue: na seção 2 deduzimos uma expressão que permite mapear um operador genérico no espaço de fase através de primeiros princípios em Mecânica Quântica (MQ). Esta expressão é interpretada como sendo uma expansão na forma integral de uma base de operadores neste espaço, cujos coeficientes representam a transformada de Weyl associada ao operador genérico em questão. Além disso, obtemos um conjunto razoável de propriedades para os elementos constituintes da expansão e mostramos que a função de Wigner é um caso particular de um formalismo mais geral introduzido por Weyl-Wigner. Na seção 3 calculamos as transformadas de Weyl das relações de comutação e anticomutação para dois operadores também arbitrários, no qual mostramos que tais expressões recuperam resultados já estabelecidos em Mecânica Clássica (MC) no limite $\hbar \rightarrow 0$. Isto nos permite realizar um estudo da evolução temporal da função de Wigner por meio do mapeamento no espaço de fase da equação de von Neumann-Liouville, conforme descrito na seção 4. Tal equação nos leva a obter uma expressão geral para a derivada temporal associada ao valor médio de um observável qualquer que, no caso particular dos operadores momentum e posição, representa a transformada de Weyl das equações de Ehrenfest da formulação usual da MQ. Finalmente, realiza-

mos o limite $\hbar \rightarrow 0$ nessas equações com o objetivo de recuperar as equações clássicas de Hamilton da MC. Na seção 5 apresentamos as considerações finais e dicas de leitura para aqueles que queiram se aprofundar no tema. Algumas seções são complementadas com exemplos que visam ilustrar e enriquecer a teoria subjacente.

Este material foi originalmente concebido na forma de apostila e seu conteúdo ministrado no primeiro curso de verão sobre tópicos em *Métodos Matemáticos da Física: Introdução ao grupo de rotações tridimensionais, estados coerentes e a formulação de Weyl-Wigner da Mecânica Quântica no espaço de fase*, realizado pelo grupo de teoria do Departamento de Física e Ciência dos Materiais (DFCM), do Instituto de Física de São Carlos (IFSC-USP), no período de 21 a 30 de janeiro deste ano e sob a coordenação do Prof. Esmerindo Bernardes. A apostila foi utilizada pelos alunos como material didático e as dúvidas que surgiram ao longo do curso, serviram-me para remodelar o seu conteúdo de modo a transformar os exercícios em exemplos e a incluir novos parágrafos que atendessem as necessidades dos participantes, culminando assim neste trabalho. Por último, gostaria de mencionar que a disposição dos tópicos e algumas passagens matemáticas foram baseadas nas referências [10, 11], as quais indico como leitura complementar ao presente texto.

II Preliminares Algébricos

Inicialmente vamos caracterizar a cinemática quântica do sistema físico descrito na introdução, por intermédio das relações de comutação associadas aos operadores $\{\mathbf{Q}, \mathbf{P}, \mathbf{1}\}$, ou seja,

$$[\mathbf{Q}, \mathbf{Q}] = [\mathbf{P}, \mathbf{P}] = [\mathbf{Q}, \mathbf{1}] = [\mathbf{P}, \mathbf{1}] = 0 \quad \text{e} \quad [\mathbf{Q}, \mathbf{P}] = i\hbar \mathbf{1} . \quad (1)$$

Tais operadores obedecem à álgebra de Weyl-Heisenberg, sendo que os autovetores correspondentes são definidos pelas equações de autovalores

$$\mathbf{P}|p\rangle = p|p\rangle , \quad \mathbf{Q}|q\rangle = q|q\rangle , \quad \mathbf{1}|p\rangle = |p\rangle , \quad \mathbf{1}|q\rangle = |q\rangle . \quad (2)$$

As bases dos autovetores $\{|p\rangle\}$ e $\{|q\rangle\}$ satisfazem as relações de completeza e ortonormalização que são dadas, respectivamente, por

$$\int_{-\infty}^{\infty} dp |p\rangle\langle p| = \mathbf{1} , \quad \int_{-\infty}^{\infty} dq |q\rangle\langle q| = \mathbf{1} , \quad (3)$$

e

$$\langle p|p'\rangle = \delta(p - p') , \quad \langle q|q'\rangle = \delta(q - q') , \quad (4)$$

sendo $\delta(x)$ a função delta de Dirac. Além disso, também conhecemos o produto escalar

$$\langle q|p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \exp\left(\frac{i}{\hbar} pq\right) , \quad (5)$$

que permite conectar os diferentes espaços dos autovetores $|p\rangle$ e $|q\rangle$ mediante a transformação de Fourier

$$|p\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{\sqrt{2\pi\hbar}} \exp\left(\frac{i}{\hbar} pq\right) |q\rangle . \quad (6)$$

De posse dessas informações, começaremos então a descrever a formulação de Weyl-Wigner da Mecânica Quântica no espaço de fase.

Considere um operador arbitrário \mathbf{F} tal que seja possível expressá-lo através da identidade

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} dp' dp'' dq' dq'' |q''\rangle \langle q''| p''\rangle \langle p''| \mathbf{F} |p'\rangle \langle p'| q'\rangle \langle q'| \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp' dp'' dq' dq''}{2\pi\hbar} \exp\left[\frac{i}{\hbar}(p''q'' - p'q')\right] \langle p''| \mathbf{F} |p'\rangle |q''\rangle \langle q'|, \end{aligned} \tag{7}$$

no qual utilizamos as relações de completeza (3) e o produto escalar (5). Introduzindo as novas variáveis

$$2p = p' + p'', \quad 2q = q' + q'', \quad u = p'' - p', \quad v = q'' - q',$$

com jacobiano igual a um,

$$dp' dp'' dq' dq'' = \underbrace{J \begin{bmatrix} p', p'' \\ p, u \end{bmatrix}}_{=1} \underbrace{J \begin{bmatrix} q', q'' \\ q, v \end{bmatrix}}_{=1} dp dq du dv = dp dq du dv,$$

então a identidade (7) pode ser escrita como uma representação integral do operador \mathbf{F} , isto é,

$$\mathbf{F} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp dq}{2\pi\hbar} f(p, q) \Delta(p, q). \tag{8}$$

A função $f(p, q)$ é denominada transformada de Weyl do operador \mathbf{F} com relação aos operadores momentum e posição, no qual é dada por [12, 13]

$$f(p, q) = \int_{-\infty}^{\infty} du \exp\left(\frac{i}{\hbar}qu\right) \langle p + u/2 | \mathbf{F} | p - u/2 \rangle. \tag{9}$$

Note que se \mathbf{F} for um operador hermitiano, então $f(p, q)$ é uma função real. Por sua vez, $\Delta(p, q)$ representa uma base de operadores no espaço de fase e cuja expressão tem a seguinte forma:

$$\Delta(p, q) = \int_{-\infty}^{\infty} dv \exp\left(\frac{i}{\hbar}pv\right) |q + v/2\rangle \langle q - v/2|. \tag{10}$$

A expressão (8) pode ser interpretada como sendo a decomposição do operador \mathbf{F} em uma base de operadores, sendo as componentes $\Delta(p, q)$ os elementos dessa base. Além disso, também mostra que se for conhecida a transformada de Weyl de um dado operador, este pode ser prontamente determinado. Em contrapartida, uma vez conhecido o operador \mathbf{F} , a correspondente transformada de Weyl é obtida através da Eq. (9). Existem outras bases estudadas na literatura que apresentam diferentes virtudes para o mapeamento e que podem ser discutidas da mesma maneira como fizemos com a base de Weyl. Um estudo detalhado dessas bases é encontrado na referência [14], no qual é feita uma comparação entre elas.

Exemplo 1 O procedimento matemático realizado para mapear o operador \mathbf{F} não é único. Ao utilizarmos convenientemente as relações de completeza (3) e as demais propriedades estabelecidas no primeiro parágrafo desta seção, obtemos uma representação integral equivalente a Eq. (8), mas agora com expressões alternativas para a transformada de Weyl $f(p, q)$ e a base de operadores $\Delta(p, q)$, isto é,

$$f(p, q) = \int_{-\infty}^{\infty} dv \exp\left(\frac{i}{\hbar}pv\right) \langle q - v/2 | \mathbf{F} | q + v/2 \rangle, \tag{11}$$

$$\Delta(p, q) = \int_{-\infty}^{\infty} du \exp\left(\frac{i}{\hbar}qu\right) |p - u/2\rangle \langle p + u/2|. \tag{12}$$

Tais expressões, em conjunto com as Eqs. (9) e (10), permitem demonstrar que os projetores de posição e momentum podem ser escritos, respectivamente, como

$$|q\rangle \langle q| = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{2\pi\hbar} \exp\left[\frac{i}{\hbar}u(q - \mathbf{Q})\right] = \delta(q - \mathbf{Q}), \tag{13}$$

$$|p\rangle \langle p| = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dv}{2\pi\hbar} \exp\left[\frac{i}{\hbar}v(p - \mathbf{P})\right] = \delta(p - \mathbf{P}). \tag{14}$$

As integrações nas variáveis u e v nos levam a obter funções delta de Dirac formais, cujo significado está associado com a ação da função delta e a substituição do argumento por um operador, não uma variável. De posse desses resultados e com o auxílio da relação de Baker-Hausdorff¹, a forma simétrica de $\Delta(p, q)$ é prontamente obtida e dada por

$$\Delta(p, q) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du dv}{2\pi\hbar} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} [u(q - \mathbf{Q}) + v(p - \mathbf{P})] \right\}. \quad (15)$$

Em consequência aos resultados delineados até o presente momento, torna-se fácil verificar que a transformada de Weyl admite a forma compacta $f(p, q) = \text{Tr} [\mathbf{F} \Delta(p, q)]$.

Existe um método alternativo muito elegante para se achar o operador \mathbf{F} a partir de sua transformada de Weyl. Para tanto, considere inicialmente a expressão do operador $\Delta(p, q)$ escrita como

$$\Delta(p, q) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du dv}{2\pi\hbar} \exp \left[\frac{i}{\hbar} u(q - \mathbf{Q}) \right] \exp \left[\frac{i}{\hbar} v(p - \mathbf{P}) \right] \exp \left(\frac{i uv}{2} \right). \quad (16)$$

Em seguida, verifique que a igualdade

$$\frac{\hbar}{2i} \frac{\partial^2}{\partial p \partial q} \exp \left[\frac{i}{\hbar} u(q - \mathbf{Q}) \right] \exp \left[\frac{i}{\hbar} v(p - \mathbf{P}) \right] = \frac{i uv}{2} \exp \left[\frac{i}{\hbar} u(q - \mathbf{Q}) \right] \exp \left[\frac{i}{\hbar} v(p - \mathbf{P}) \right]$$

nos leva a obter o integrando da Eq. (16) através da operação

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{\hbar}{2i} \frac{\partial^2}{\partial p \partial q} \right)^k \exp \left[\frac{i}{\hbar} u(q - \mathbf{Q}) \right] \exp \left[\frac{i}{\hbar} v(p - \mathbf{P}) \right] &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{i uv}{2} \right)^k \exp \left[\frac{i}{\hbar} u(q - \mathbf{Q}) \right] \\ &\times \exp \left[\frac{i}{\hbar} v(p - \mathbf{P}) \right], \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \exp \left(\frac{\hbar}{2i} \frac{\partial^2}{\partial p \partial q} \right) \exp \left[\frac{i}{\hbar} u(q - \mathbf{Q}) \right] \exp \left[\frac{i}{\hbar} v(p - \mathbf{P}) \right] &= \exp \left(\frac{i uv}{2} \right) \exp \left[\frac{i}{\hbar} u(q - \mathbf{Q}) \right] \\ &\times \exp \left[\frac{i}{\hbar} v(p - \mathbf{P}) \right]. \end{aligned}$$

Agora, inserindo esse resultado na expressão para $\Delta(p, q)$ chega-se a

$$\begin{aligned} \Delta(p, q) &= \exp \left(\frac{\hbar}{2i} \frac{\partial^2}{\partial p \partial q} \right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du dv}{2\pi\hbar} \exp \left[\frac{i}{\hbar} u(q - \mathbf{Q}) \right] \exp \left[\frac{i}{\hbar} v(p - \mathbf{P}) \right] \\ &= 2\pi\hbar \exp \left(\frac{\hbar}{2i} \frac{\partial^2}{\partial p \partial q} \right) \delta(q - \mathbf{Q}) \delta(p - \mathbf{P}), \end{aligned} \quad (17)$$

o qual permite-nos escrever a expressão para o operador \mathbf{F} como

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \int_{-\infty}^{\infty} dp dq f(p, q) \left[\exp \left(\frac{\hbar}{2i} \frac{\partial^2}{\partial p \partial q} \right) \delta(q - \mathbf{Q}) \delta(p - \mathbf{P}) \right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dp dq \left[\exp \left(\frac{\hbar}{2i} \frac{\partial^2}{\partial p \partial q} \right) f(p, q) \right] \delta(q - \mathbf{Q}) \delta(p - \mathbf{P}), \end{aligned} \quad (18)$$

sendo a segunda igualdade obtida por intermédio da relação auxiliar

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \left[\frac{d^m}{dx^m} \delta(x) \right] = (-1)^m \frac{d^m}{dx^m} f(x) \Big|_{x=0} = (-1)^m \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\frac{d^m}{dx^m} f(x) \right] \delta(x).$$

¹Se \mathbf{A} e \mathbf{B} são dois operadores que não comutam e que satisfazem as condições

$$[\mathbf{A}, [\mathbf{A}, \mathbf{B}]] = [\mathbf{B}, [\mathbf{A}, \mathbf{B}]] = 0,$$

então

$$e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}} = e^{\mathbf{A}} e^{\mathbf{B}} e^{-\frac{1}{2}[\mathbf{A}, \mathbf{B}]} = e^{\mathbf{B}} e^{\mathbf{A}} e^{\frac{1}{2}[\mathbf{A}, \mathbf{B}]}. \quad (15)$$

Este resultado é uma forma simplificada da relação de Baker-Hausdorff [15].

Note que para encontrarmos tal operador, a partir de sua transformada de Weyl, devemos em um primeiro momento calcular

$$\exp\left(\frac{\hbar}{2i} \frac{\partial^2}{\partial p \partial q}\right) f(p, q)$$

e depois substituir as variáveis q e p pelos respectivos operadores \mathbf{Q} e \mathbf{P} , com a ressalva de escrevermos os operadores posição à esquerda dos operadores momentum. Este procedimento é muito útil quando se trabalha com produtos simples de \mathbf{Q} e \mathbf{P} , e a ressalva da ordem dos operadores garante a completa simetrização do operador resultante [10].

Exemplo 2 Como aplicação do método estabelecido no parágrafo anterior, considere que a transformada de Weyl seja conhecida e dada pela função $f(p, q) = g(q)p^n$. Assim sendo, temos que

$$\begin{aligned} \exp\left(\frac{\hbar}{2i} \frac{\partial^2}{\partial p \partial q}\right) g(q)p^n &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{\hbar}{2i}\right)^k \frac{\partial^k}{\partial q^k} g(q) \frac{\partial^k}{\partial p^k} p^n \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{\hbar}{2i}\right)^k \frac{\partial^k}{\partial q^k} g(q) p^{n-k}, \end{aligned}$$

no qual $\binom{n}{k} \equiv n!/k!(n-k)!$ denota os coeficientes binomiais. A segunda igualdade foi obtida com o auxílio da relação

$$\frac{\partial^k}{\partial p^k} p^n = \frac{n!}{(n-k)!} p^{n-k} \quad (k \leq n),$$

levando-nos a transformar a soma infinita em uma soma finita. Ao substituirmos esse resultado na Eq. (18) e realizando as integrações com o cuidado de preservar a ordem dos operadores posição e momentum, chega-se a

$$\mathbf{F} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{\hbar}{2i}\right)^k \frac{d^k}{d\mathbf{Q}^k} \mathbf{g}(\mathbf{Q}) \mathbf{P}^{n-k}. \tag{19}$$

Em seguida, vamos demonstrar que o operador \mathbf{F} também pode ser escrito como

$$\mathbf{F} = \frac{1}{2^n} \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \mathbf{P}^l \mathbf{g}(\mathbf{Q}) \mathbf{P}^{n-l}. \tag{20}$$

Para tanto, recorreremos inicialmente as relações já estabelecidas na literatura para os coeficientes binomiais,

$$\binom{n}{l} \binom{l}{k} = \binom{n}{k} \binom{n-k}{l-k} \quad e \quad \sum_{m=0}^{n-k} \binom{n-k}{m} = 2^{n-k},$$

de modo a obtermos uma expressão intermediária para o operador \mathbf{F} mediante os seguinte passos:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^{n-k} \left(\frac{\hbar}{i}\right)^k \frac{\partial^k}{\partial \mathbf{Q}^k} \mathbf{g}(\mathbf{Q}) \mathbf{P}^{n-k} \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \sum_{m=0}^{n-k} \binom{n}{k} \binom{n-k}{m} \left(\frac{\hbar}{i}\right)^k \frac{\partial^k}{\partial \mathbf{Q}^k} \mathbf{g}(\mathbf{Q}) \mathbf{P}^{n-k}. \end{aligned}$$

Agora, realizando a troca de índices $m = l - k$ com $k \leq l \leq n$ na segunda soma, obtem-se

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \sum_{l=k}^n \binom{n}{k} \binom{n-k}{l-k} \left(\frac{\hbar}{i}\right)^k \frac{\partial^k}{\partial \mathbf{Q}^k} \mathbf{g}(\mathbf{Q}) \mathbf{P}^{n-k} \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{l=0}^n \sum_{k=0}^l \binom{n}{l} \binom{l}{k} \left(\frac{\hbar}{i}\right)^k \frac{\partial^k}{\partial \mathbf{Q}^k} \mathbf{g}(\mathbf{Q}) \mathbf{P}^{n-k} \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \underbrace{\sum_{k=0}^l \binom{l}{k} \left(\frac{\hbar}{i}\right)^k \frac{\partial^k}{\partial \mathbf{Q}^k} \mathbf{g}(\mathbf{Q}) \mathbf{P}^{l-k}}_{\mathbf{P}^l \mathbf{g}(\mathbf{Q})} \mathbf{P}^{n-l} \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \mathbf{P}^l \mathbf{g}(\mathbf{Q}) \mathbf{P}^{n-l}. \quad \square \end{aligned}$$

Note que na terceira igualdade utilizamos a relação de comutação $[\mathbf{P}, \mathbf{g}(\mathbf{Q})] = -i\hbar \frac{d}{d\mathbf{Q}} \mathbf{g}(\mathbf{Q})$, o que permitiu-nos mostrar a relação

$$\mathbf{P}^l \mathbf{g}(\mathbf{Q}) = \sum_{k=0}^l \binom{l}{k} \left(\frac{\hbar}{i}\right)^k \frac{d^k}{d\mathbf{Q}^k} \mathbf{g}(\mathbf{Q}) \mathbf{P}^{l-k}.$$

Por último, resta-nos somente mencionar o fato de que a Eq. (20) possui uma expressão analítica fechada que é dada por

$$\mathbf{F} = \frac{1}{2^n} \underbrace{\{\{\dots\{\mathbf{g}(\mathbf{Q}), \mathbf{P}\}, \mathbf{P}\}, \dots, \mathbf{P}\}}_{n \text{ anticomutadores}}, \quad (21)$$

em que $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}\} = \mathbf{AB} + \mathbf{BA}$ corresponde ao anticomutador entre os operadores \mathbf{A} e \mathbf{B} . Para deduzirmos tal expressão, basta recorrermos a relação de comutação supracitada para verificarmos que

$$\underbrace{\{\{\dots\{\mathbf{g}(\mathbf{Q}), \mathbf{P}\}, \mathbf{P}\}, \dots, \mathbf{P}\}}_{n \text{ anticomutadores}} = \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \mathbf{P}^l \mathbf{g}(\mathbf{Q}) \mathbf{P}^{n-l},$$

levando-nos assim ao resultado desejado.

Já a função da Mecânica Clássica que corresponde ao operador \mathbf{F} , pode ser encontrada por intermédio da transformada de Weyl deste operador realizando-se o limite $\hbar \rightarrow 0$,

$$f_{cl}(p, q) = \lim_{\hbar \rightarrow 0} f(p, q). \quad (22)$$

Note que $f(p, q)$ não é a quantidade clássica associada ao operador quântico \mathbf{F} , mas somente uma função que, em geral, pode ser expressa como uma série de potências em \hbar . Portanto, o procedimento $\hbar \rightarrow 0$ é crucial para obtermos $f_{cl}(p, q)$.

No formalismo desenvolvido até o presente mo-

mento, $\Delta(p, q)$ desempenha um papel importante pois trata-se de um elemento que permite mapear operadores no espaço de fase. Como tal, este também pode ser expandido numa base de operadores como

$$\Delta(p', q') = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp dq}{2\pi\hbar} f(p, q) \Delta(p, q),$$

no qual $f(p, q) = 2\pi\hbar \delta(p - p')\delta(q - q')$. Em seguida, vamos exibir uma série de propriedades para $\Delta(p, q)$ que serão muito úteis no decorrer do trabalho. Dessa forma, vamos iniciar com os elementos de matriz

$$(i) \langle q' | \Delta(p, q) | q'' \rangle = \exp\left[\frac{i}{\hbar} p(q' - q'')\right] \delta\left(q - \frac{q' + q''}{2}\right), \quad (23)$$

$$(ii) \langle p' | \Delta(p, q) | p'' \rangle = \exp\left[-\frac{i}{\hbar} q(p' - p'')\right] \delta\left(p - \frac{p' + p''}{2}\right), \quad (24)$$

$$(iii) \langle q' | \Delta(p, q) | p' \rangle = \sqrt{2\pi\hbar} \exp\left(\frac{i}{\hbar} p'q'\right) \exp\left(\frac{\hbar}{2i} \frac{\partial^2}{\partial p \partial q}\right) \delta(p - p')\delta(q - q'). \quad (25)$$

As Eqs.(23) e (24) podem ser demonstradas de imediato com o auxílio das definições estabelecidas para $\Delta(p, q)$ e o produto escalar (5). Consequentemente, ao considerarmos $q'' = q'$ e $p'' = p'$, tais expressões se reduzem a $\langle q' | \Delta(p, q) | q' \rangle = \delta(q - q')$ e $\langle p' | \Delta(p, q) | p' \rangle = \delta(p - p')$, respectivamente. Com relação a demonstração da Eq.(25), esta requer o auxílio da Eq.(17) e alguns cuidados decorrentes do cálculo como veremos abaixo:

$$\begin{aligned} \langle q' | \Delta(p, q) | p' \rangle &= 2\pi\hbar \exp\left(\frac{\hbar}{2i} \frac{\partial^2}{\partial p \partial q}\right) \langle q' | \delta(q - \mathbf{Q}) \delta(p - \mathbf{P}) | p' \rangle \\ &= 2\pi\hbar \exp\left(\frac{\hbar}{2i} \frac{\partial^2}{\partial p \partial q}\right) \int_{-\infty}^{\infty} dq'' \langle q' | \delta(q - \mathbf{Q}) | q'' \rangle \langle q'' | \delta(p - \mathbf{P}) | p' \rangle \\ &= 2\pi\hbar \exp\left(\frac{\hbar}{2i} \frac{\partial^2}{\partial p \partial q}\right) \delta(p - p') \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq''}{\sqrt{2\pi\hbar}} \exp\left(\frac{i}{\hbar} p'q''\right) \delta(q - q'')\delta(q' - q'') \\ &= \sqrt{2\pi\hbar} \exp\left(\frac{i}{\hbar} p'q'\right) \exp\left(\frac{\hbar}{2i} \frac{\partial^2}{\partial p \partial q}\right) \delta(p - p')\delta(q - q'). \quad \square \end{aligned}$$

As integrações do operador $\Delta(p, q)$ nas variáveis p e q resultam em

$$(iv) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi\hbar} \Delta(p, q) = |q\rangle\langle q| \tag{26}$$

e

$$(v) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{2\pi\hbar} \Delta(p, q) = |p\rangle\langle p|. \tag{27}$$

Tais resultados nos levam aos projetores dos estados particulares do conjunto de autovetores dos operadores posição e momentum. Como decorrência dessas propriedades, vamos retornar à definição da transformada de Weyl do operador \mathbf{F} , ou seja, $f(p, q) = \text{Tr} [\mathbf{F} \Delta(p, q)]$. Ao considerarmos $\mathbf{F} = \rho$ (operador densidade associado a um sistema físico), obtemos formalmente a definição da função de Wigner [2]

$$W(p, q) = \int_{-\infty}^{\infty} dv \exp\left(\frac{i}{\hbar} pv\right) \langle q - v/2 | \rho | q + v/2 \rangle. \tag{28}$$

Assim, para $\rho = |\Psi\rangle\langle\Psi|$, as propriedades (26) e (27) assumem a seguinte forma:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi\hbar} W(p, q) = |\Psi(q)|^2 \quad \text{e} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{2\pi\hbar} W(p, q) = |\Phi(p)|^2. \tag{29}$$

Logo, ao integrarmos a função de Wigner em uma das variáveis do espaço de fase, recuperamos as densidades de probabilidades associadas às respectivas funções de onda $\Psi(q)$ e $\Phi(p)$. Esta é uma característica particular de $W(p, q)$ e não se estende para as demais quase-distribuições de probabilidades [16, 17]. Outras propriedades serão abordadas nas próximas seções.

Exemplo 3 Vamos calcular a função de Wigner associada ao n -ésimo estado do oscilador harmônico unidimensional descrito pelo operador densidade $\rho = |n\rangle\langle n|$ e cuja função de onda é dada por

$$\Psi_n(q) = \langle q | n \rangle = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi} 2^n n! b}} \exp\left(-\frac{q^2}{2b^2}\right) H_n(q/b), \tag{30}$$

em que $H_n(x)$ denota os polinômios de Hermite e $b^2 = \hbar/m\omega$. Para tanto, devemos inicialmente recorrer a Eq. (28) e proceder com o cálculo da integral delineado abaixo:

$$W_n(p, q) = \frac{2(-1)^n}{\sqrt{\pi} 2^n n!} \exp\left[-\left(\frac{q^2}{b^2} + \frac{b^2 p^2}{\hbar^2}\right)\right] \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dv}{2b} \exp\left[-\left(\frac{v}{2b} - i\frac{bp}{\hbar}\right)^2\right] H_n\left(\frac{v}{2b} - \frac{q}{b}\right) H_n\left(\frac{v}{2b} + \frac{q}{b}\right).$$

Substituindo a variável $x = \frac{v}{2b} - i\frac{bp}{\hbar}$ no integrando, obtém-se a expressão intermediária

$$W_n(p, q) = \frac{2(-1)^n}{\sqrt{\pi} 2^n n!} \exp\left[-\left(\frac{q^2}{b^2} + \frac{b^2 p^2}{\hbar^2}\right)\right] \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} H_n\left[x + \left(\frac{q}{b} + i\frac{bp}{\hbar}\right)\right] H_n\left[x - \left(\frac{q}{b} - i\frac{bp}{\hbar}\right)\right].$$

Agora, com o auxílio da relação [18]

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} H_m(x+y) H_n(x+z) = \sqrt{\pi} 2^n m! z^{n-m} L_m^{(n-m)}(-2yz) \quad (n \geq m)$$

sendo $L_n^{(m)}(x)$ os polinômios de Laguerre associados, a integração pode ser efetuada de imediato, levando-nos ao resultado final

$$W_n(p, q) = 2(-1)^n \exp\left[-\left(\frac{q^2}{b^2} + \frac{b^2 p^2}{\hbar^2}\right)\right] L_n\left[2\left(\frac{q^2}{b^2} + \frac{b^2 p^2}{\hbar^2}\right)\right]. \tag{31}$$

Esta função é comumente encontrada em livros textos sobre Óptica Quântica [19-22] sob a forma compacta

$$W_n(\alpha) = 2(-1)^n e^{-|\alpha|^2} L_n(2|\alpha|^2), \tag{32}$$

com $\alpha = \frac{q}{b} + i\frac{bp}{\hbar}$. A figura 1 mostra os gráficos da função de Wigner $W_n(p, q)$ versus $\left(\frac{q}{b}, \frac{bp}{\hbar}\right)$ para o estado fundamental (a) $n = 0$ e os cinco primeiros estados excitados (b)-(f) $n = 1, \dots, 5$ do oscilador harmônico unidimensional. Note que a função assume valores negativos no espaço de fase e este importante fato está associado ao caráter quântico do operador densidade em questão. É importante salientarmos que a função $W_1(p, q)$ foi reconstruída recentemente pelo grupo do NIST em um belo experimento envolvendo íons ${}^9\text{Be}^+$ aprisionados em uma armadilha de Paul [7]. Na seção IV, retomaremos novamente neste ponto ao discutirmos as propriedades da função de Wigner.

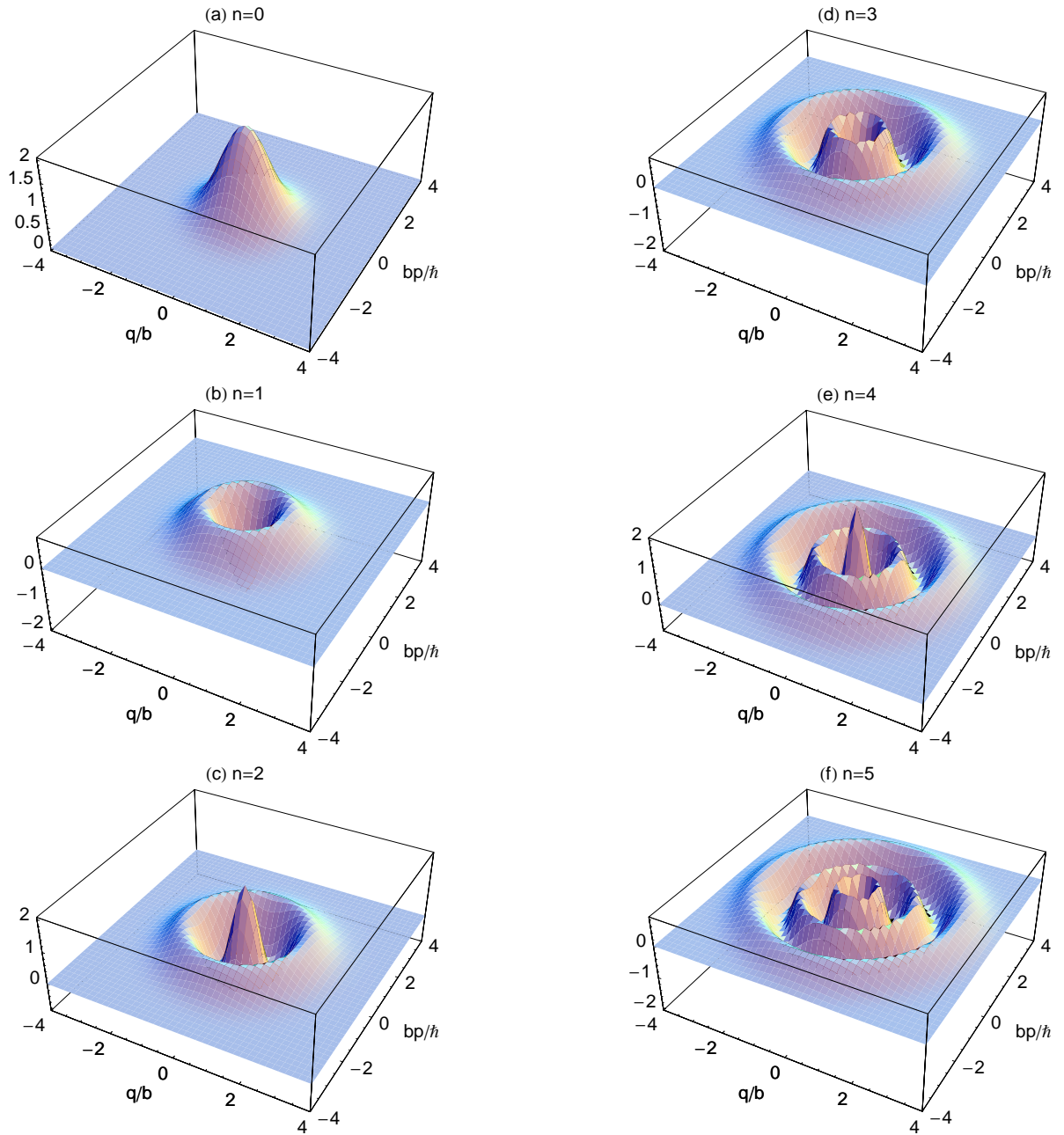


Figura 1. As figuras 1(a)-(f) correspondem aos gráficos de $W_n(p, q)$ versus $\frac{q}{b}$ e $\frac{bp}{\hbar}$ para $n = 0, \dots, 5$. Os valores negativos da função de Wigner estão compreendidos no intervalo $-\frac{1}{\pi\hbar} \leq W_n(p, q) \leq \frac{1}{\pi\hbar}$ e associados ao caráter quântico do estado de número.

Para finalizarmos esta seção, resta-nos somente mencionar as propriedades relativas ao traço do operador $\Delta(p, q)$ e do produto destes operadores, com a finalidade de obtermos expressões analíticas para a transformada de Weyl das relações de comutação e anticomutação. Recorrendo a definição da operação traço, temos que

$$(vi) \quad \text{Tr} [\Delta(p, q)] = 1, \quad (33)$$

$$(vii) \quad \text{Tr} [\Delta(p_1, q_1) \Delta(p_2, q_2)] = 2\pi\hbar \delta(p_1 - p_2) \delta(q_1 - q_2), \quad (34)$$

$$(viii) \quad \text{Tr} [\Delta(p_1, q_1) \Delta(p_2, q_2) \Delta(p_3, q_3)] = 2^2 \exp \left\{ \frac{2i}{\hbar} [(q_1 - q_3)(p_2 - p_3) - (q_2 - q_3)(p_1 - p_3)] \right\}. \quad (35)$$

A demonstração da Eq.(34) é imediata desde que utilizamos a propriedade (23), ou seja,

$$\begin{aligned} \text{Tr} [\Delta(p_1, q_1) \Delta(p_2, q_2)] &= \int_{-\infty}^{\infty} dq' \langle q' | \Delta(p_1, q_1) \Delta(p_2, q_2) | q' \rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dq' dq'' \langle q' | \Delta(p_1, q_1) | q'' \rangle \langle q'' | \Delta(p_2, q_2) | q' \rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dq' dq'' \exp \left[\frac{i}{\hbar} (q' - q'')(p_1 - p_2) \right] \delta \left(q_1 - \frac{q' + q''}{2} \right) \delta \left(q_2 - \frac{q' + q''}{2} \right). \end{aligned}$$

Agora, substituindo as novas variáveis $q' + q'' = 2x_1$ e $q' - q'' = x_2$ na expressão acima com

$$dq' dq'' = \underbrace{J \begin{bmatrix} q' & q'' \\ x_1 & x_2 \end{bmatrix}}_{=1} dx_1 dx_2 = dx_1 dx_2,$$

finalizamos os cálculos como segue:

$$\begin{aligned} \text{Tr} [\Delta(p_1, q_1) \Delta(p_2, q_2)] &= \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 dx_2 \exp \left[\frac{i}{\hbar} x_2 (p_1 - p_2) \right] \delta(q_1 - x_1) \delta(q_2 - x_2) \\ &= 2\pi\hbar \delta(p_1 - p_2) \delta(q_1 - q_2). \quad \square \end{aligned}$$

De maneira análoga, temos que a demonstração da Eq.(35) exige cuidados adicionais, uma vez que

$$\begin{aligned} \text{Tr} [\Delta(p_1, q_1) \Delta(p_2, q_2) \Delta(p_3, q_3)] &= \int_{-\infty}^{\infty} dq' dq'' dq''' \langle q' | \Delta(p_1, q_1) | q'' \rangle \langle q'' | \Delta(p_2, q_2) | q''' \rangle \langle q''' | \Delta(p_3, q_3) | q' \rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dq' dq'' dq''' \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} [p_1 (q' - q'') + p_2 (q'' - q''') + p_3 (q''' - q')] \right\} \\ &\quad \times \delta \left(q_1 - \frac{q' + q''}{2} \right) \delta \left(q_2 - \frac{q'' + q'''}{2} \right) \delta \left(q_3 - \frac{q''' + q'}{2} \right). \end{aligned}$$

Agora, designando $q' + q'' = 2x_1$, $q'' + q''' = 2x_2$ e $q''' + q' = 2x_3$ com

$$dq' dq'' dq''' = \underbrace{J \begin{bmatrix} q' & q'' & q''' \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}}_{=2^2} dx_1 dx_2 dx_3 = 2^2 dx_1 dx_2 dx_3,$$

obtemos

$$\begin{aligned} \text{Tr} [\Delta(p_1, q_1) \Delta(p_2, q_2) \Delta(p_3, q_3)] &= 2^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 dx_2 dx_3 \delta(q_1 - x_1) \delta(q_2 - x_2) \delta(q_3 - x_3) \\ &\quad \times \exp \left\{ \frac{2i}{\hbar} [(x_1 - x_3)(p_2 - p_3) - (x_2 - x_3)(p_1 - p_3)] \right\} \\ &= 2^2 \exp \left\{ \frac{2i}{\hbar} [(q_1 - q_3)(p_2 - p_3) - (q_2 - q_3)(p_1 - p_3)] \right\}. \quad \square \end{aligned}$$

Conseqüentemente, ao identificarmos novamente \mathbf{F} com o operador densidade ρ , novas propriedades associadas a função de Wigner surgem naturalmente: a primeira refere-se a sua normalização,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp dq}{2\pi\hbar} W(p, q) = 1; \tag{36}$$

enquanto que a segunda propriedade reflete a ciclicidade da operação traço,

$$\begin{aligned} \text{Tr} (\rho_1 \rho_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_1 dq_1 dp_2 dq_2}{(2\pi\hbar)^2} W_{\rho_1}(p_1, q_1) W_{\rho_2}(p_2, q_2) \text{Tr} [\Delta(p_1, q_1) \Delta(p_2, q_2)] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_1 dq_1 dp_2 dq_2}{2\pi\hbar} W_{\rho_1}(p_1, q_1) W_{\rho_2}(p_2, q_2) \delta(p_1 - p_2) \delta(q_1 - q_2) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_1 dq_1}{2\pi\hbar} W_{\rho_1}(p_1, q_1) W_{\rho_2}(p_1, q_1) \\ &= \text{Tr} (\rho_2 \rho_1). \end{aligned} \tag{37}$$

Os resultados aqui obtidos são de extrema valia no que se refere ao mapeamento das relações de comutação e anticomutação, conforme veremos a seguir.

III O mapeamento das relações de comutação e anticomutação

Para encontrarmos a transformada de Weyl das relações de comutação e anticomutação entre dois operadores arbitrários \mathbf{A} e \mathbf{B} em MQ, torna-se necessário estudar inicialmente a transformada de Weyl do produto \mathbf{AB} . O ponto de partida é a representação integral (8), isto é,

$$\begin{aligned} \mathbf{AB} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_1 dq_1 dp_2 dq_2}{(2\pi\hbar)^2} \mathcal{A}(p_1, q_1) \mathcal{B}(p_2, q_2) \mathbf{\Delta}(p_1, q_1) \mathbf{\Delta}(p_2, q_2) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp dq}{2\pi\hbar} f(p, q) \mathbf{\Delta}(p, q), \end{aligned} \quad (38)$$

no qual $f(p, q) = \text{Tr} [\mathbf{AB} \mathbf{\Delta}(p, q)]$. Assim, substituindo a primeira igualdade da equação acima em $f(p, q)$, ficamos com

$$\begin{aligned} f(p, q) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_1 dq_1 dp_2 dq_2}{(2\pi\hbar)^2} \mathcal{A}(p_1, q_1) \mathcal{B}(p_2, q_2) \text{Tr} [\mathbf{\Delta}(p_1, q_1) \mathbf{\Delta}(p_2, q_2) \mathbf{\Delta}(p, q)] \\ &= 2^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_1 dq_1 dp_2 dq_2}{(2\pi\hbar)^2} \mathcal{A}(p_1, q_1) \mathcal{B}(p_2, q_2) \exp \left\{ \frac{2i}{\hbar} [(q_1 - q)(p_2 - p) - (q_2 - q)(p_1 - p)] \right\}. \end{aligned} \quad (39)$$

Para resolvermos essa integral devemos, em princípio, realizar a troca de variáveis $\bar{p} = p_2 - p$ e $\bar{q} = q_2 - q$, o que nos leva a

$$f(p, q) = 2^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_1 dq_1 d\bar{p} d\bar{q}}{(2\pi\hbar)^2} \mathcal{A}(p_1, q_1) \mathcal{B}(\bar{p} + p, \bar{q} + q) \exp \left\{ \frac{2i}{\hbar} [\bar{p}(q_1 - q) - \bar{q}(p_1 - p)] \right\}.$$

Agora, expandindo a função $\mathcal{B}(\bar{p} + p, \bar{q} + q)$ em uma série de Taylor nas proximidades dos pontos (p, q) , obtem-se

$$\mathcal{B}(\bar{p} + p, \bar{q} + q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\bar{p} \frac{\partial}{\partial p} + \bar{q} \frac{\partial}{\partial q} \right)^n \mathcal{B}(p, q) = \exp \left(\bar{p} \frac{\partial}{\partial p} + \bar{q} \frac{\partial}{\partial q} \right) \mathcal{B}(p, q).$$

Esta relação permite-nos verificar a igualdade

$$\begin{aligned} &\exp \left\{ \frac{2i}{\hbar} [\bar{p}(q_1 - q) - \bar{q}(p_1 - p)] \right\} \exp \left(\bar{p} \frac{\partial}{\partial p} + \bar{q} \frac{\partial}{\partial q} \right) \mathcal{B}(p, q) = \\ &\exp \left\{ \frac{2i}{\hbar} [\bar{p}(q_1 - q) - \bar{q}(p_1 - p)] \right\} \exp \left[\frac{\hbar}{2i} \left(\overleftarrow{\frac{\partial}{\partial p}} \overrightarrow{\frac{\partial}{\partial q}} - \overleftarrow{\frac{\partial}{\partial q}} \overrightarrow{\frac{\partial}{\partial p}} \right) \right] \mathcal{B}(p, q) \end{aligned}$$

que é fundamental para os nossos propósitos. Note que as variáveis \bar{p} e \bar{q} foram substituídas pelos operadores diferenciais $-\frac{\hbar}{2i} \frac{\partial}{\partial q}$ e $\frac{\hbar}{2i} \frac{\partial}{\partial p}$, respectivamente, atuando na primeira exponencial. Este fato justifica a taquigrafia utilizada no lado direito da igualdade e as setas indicam o sentido de atuação dos operadores diferenciais. Logo, a transformada de Weyl $f(p, q)$ pode ser reescrita como segue:

$$\begin{aligned} f(p, q) &= 2^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_1 dq_1 d\bar{p} d\bar{q}}{(2\pi\hbar)^2} \mathcal{A}(p_1, q_1) \exp \left\{ \frac{2i}{\hbar} [\bar{p}(q_1 - q) - \bar{q}(p_1 - p)] \right\} \\ &\quad \times \exp \left[\frac{\hbar}{2i} \left(\overleftarrow{\frac{\partial}{\partial p}} \overrightarrow{\frac{\partial}{\partial q}} - \overleftarrow{\frac{\partial}{\partial q}} \overrightarrow{\frac{\partial}{\partial p}} \right) \right] \mathcal{B}(p, q) \\ &= 2^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_1 dq_1}{2\pi\hbar} \mathcal{A}(p_1, q_1) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\bar{p} d\bar{q}}{2\pi\hbar} \exp \left\{ \frac{2i}{\hbar} [\bar{p}(q_1 - q) - \bar{q}(p_1 - p)] \right\}}_{= \frac{2\pi\hbar}{2^2} \delta(p_1 - p) \delta(q_1 - q)} \\ &\quad \times \exp \left[\frac{\hbar}{2i} \left(\overleftarrow{\frac{\partial}{\partial p}} \overrightarrow{\frac{\partial}{\partial q}} - \overleftarrow{\frac{\partial}{\partial q}} \overrightarrow{\frac{\partial}{\partial p}} \right) \right] \mathcal{B}(p, q) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dp_1 dq_1 \mathcal{A}(p_1, q_1) \delta(p_1 - p) \delta(q_1 - q) \exp \left[\frac{\hbar}{2i} \left(\overleftarrow{\frac{\partial}{\partial p}} \overrightarrow{\frac{\partial}{\partial q}} - \overleftarrow{\frac{\partial}{\partial q}} \overrightarrow{\frac{\partial}{\partial p}} \right) \right] \mathcal{B}(p, q) \\ &= \mathcal{A}(p, q) \exp \left[\frac{\hbar}{2i} \left(\overleftarrow{\frac{\partial}{\partial p}} \overrightarrow{\frac{\partial}{\partial q}} - \overleftarrow{\frac{\partial}{\partial q}} \overrightarrow{\frac{\partial}{\partial p}} \right) \right] \mathcal{B}(p, q). \end{aligned} \quad (40)$$

Esse resultado nos leva a concluir que a transformada de Weyl do produto de operadores $\mathbf{A}\mathbf{B}$ não é igual ao produto das transformadas $\mathcal{A}(p, q)\mathcal{B}(p, q)$, mas sim uma função mais complicada que depende de todas as ordens em \hbar do operador pseudo-diferencial localizado entre as funções $\mathcal{A}(p, q)$ e $\mathcal{B}(p, q)$. Em geral, tal operador é denotado pelo símbolo \star introduzido por Groenewold [23],

$$\star \equiv \exp \left[\frac{\hbar}{2i} \left(\overleftarrow{\frac{\partial}{\partial p}} \overrightarrow{\frac{\partial}{\partial q}} - \overleftarrow{\frac{\partial}{\partial q}} \overrightarrow{\frac{\partial}{\partial p}} \right) \right],$$

o qual representa uma deformação pseudo-diferencial associativa do produto ordinário $\mathcal{A}(p, q)\mathcal{B}(p, q)$. Desse modo, a Eq.(40) também pode ser encontrada na literatura sob a forma [24]

$$f(p, q) = \mathcal{A}(p, q) \star \mathcal{B}(p, q), \tag{41}$$

cujas aplicações em física se estendem desde o estudo de modelos semiclássicos e caóticos até as idéias de geometria não-comutativa em gravitação quântica [25]. Outras aplicações do produto- \star e informações técnicas mais detalhadas podem ser obtidas nas referências [26, 27].

A transformada de Weyl das relações de comutação e anticomutação decorrem agora prontamente da Eq.(40),

$$[\mathbf{A}, \mathbf{B}] \equiv 2i \sin \left[\frac{\hbar}{2} \left(\frac{\partial^{(\mathcal{A})}}{\partial p} \frac{\partial^{(\mathcal{B})}}{\partial q} - \frac{\partial^{(\mathcal{A})}}{\partial q} \frac{\partial^{(\mathcal{B})}}{\partial p} \right) \right] \mathcal{A}(p, q)\mathcal{B}(p, q), \tag{42}$$

$$\{\mathbf{A}, \mathbf{B}\} \equiv 2 \cos \left[\frac{\hbar}{2} \left(\frac{\partial^{(\mathcal{A})}}{\partial p} \frac{\partial^{(\mathcal{B})}}{\partial q} - \frac{\partial^{(\mathcal{A})}}{\partial q} \frac{\partial^{(\mathcal{B})}}{\partial p} \right) \right] \mathcal{A}(p, q)\mathcal{B}(p, q). \tag{43}$$

Nessas expressões, as funções seno e cosseno devem ser interpretadas formalmente como a série correspondente a cada um deles, respectivamente. Além disso, os índices \mathcal{A} e \mathcal{B} empregados nos operadores diferenciais indicam as transformadas de Weyl em que os operadores atuam, caracterizando assim numa mudança de notação. Alternativamente, utilizando a notação de Groenewold, tais expressões adquirem o seguinte aspecto:

$$[\mathbf{A}, \mathbf{B}] \equiv \mathcal{A}(p, q) \star \mathcal{B}(p, q) - \mathcal{B}(p, q) \star \mathcal{A}(p, q), \tag{44}$$

$$\{\mathbf{A}, \mathbf{B}\} \equiv \mathcal{A}(p, q) \star \mathcal{B}(p, q) + \mathcal{B}(p, q) \star \mathcal{A}(p, q). \tag{45}$$

Note que as Eqs.(42) e (43) são séries em \hbar e os termos de ordem mais baixa representados por

$$i\hbar \left(\frac{\partial^{(\mathcal{A})}}{\partial p} \frac{\partial^{(\mathcal{B})}}{\partial q} - \frac{\partial^{(\mathcal{A})}}{\partial q} \frac{\partial^{(\mathcal{B})}}{\partial p} \right) \mathcal{A}(p, q)\mathcal{B}(p, q) \quad \text{e} \quad 2\mathcal{A}(p, q)\mathcal{B}(p, q),$$

respectivamente. Consequentemente, a série associada a transformada de Weyl de $\frac{1}{i\hbar} [\mathbf{A}, \mathbf{B}]$ começa com o parênteses de Poisson das transformadas de Weyl de \mathbf{A} e \mathbf{B} ; enquanto que a série associada a $\frac{1}{2} \{\mathbf{A}, \mathbf{B}\}$, inicia com o produto das transformadas de Weyl de \mathbf{A} e \mathbf{B} . Assim, considerando o limite $\hbar \rightarrow 0$, ficamos com

$$\lim_{\hbar \rightarrow 0} \frac{1}{i\hbar} [\mathbf{A}, \mathbf{B}] \longrightarrow \left(\frac{\partial^{(\mathcal{A})}}{\partial p} \frac{\partial^{(\mathcal{B})}}{\partial q} - \frac{\partial^{(\mathcal{A})}}{\partial q} \frac{\partial^{(\mathcal{B})}}{\partial p} \right) \mathcal{A}_{cl}(p, q)\mathcal{B}_{cl}(p, q), \tag{46}$$

$$\lim_{\hbar \rightarrow 0} \frac{1}{2} \{\mathbf{A}, \mathbf{B}\} \longrightarrow \mathcal{A}_{cl}(p, q)\mathcal{B}_{cl}(p, q). \tag{47}$$

Isto nos motiva a procurar o limite do análogo clássico da equação de von Neumann-Liouville, ou seja, verificar se a dinâmica quântica tende à dinâmica clássica no limite $\hbar \rightarrow 0$.

IV A dinâmica quântica

Vamos considerar um sistema físico qualquer descrito pelo operador densidade $\rho(t) = |\Psi(t)\rangle\langle\Psi(t)|$, em que $|\Psi(t)\rangle$ representa um estado puro do sistema. O cálculo do valor médio de um operador \mathbf{F} é feito pela definição usual da MQ,

$$\langle \mathbf{F} \rangle_t = \text{Tr} [\rho(t)\mathbf{F}] = \langle \Psi(t)|\mathbf{F}|\Psi(t) \rangle, \tag{48}$$

ou através dos resultados obtidos até o presente momento,

$$\langle \mathbf{F} \rangle_t = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp dq}{2\pi\hbar} f(p, q)W(p, q; t), \tag{49}$$

com $W(p, q; t)$ sendo a função de Wigner para um tempo t arbitrário. Assim, antes de prosseguirmos com a descrição da dinâmica do sistema, vamos apresentar algumas propriedades adicionais para a função de Wigner. As duas primeiras propriedades referem-se ao cálculo da quase-distribuição por intermédio das Eqs.(10) e (17), isto é,

$$\begin{aligned} (i) \quad W(p, q; t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dv}{2\pi\hbar} \exp\left(\frac{i}{\hbar} pv\right) \Psi(q - v/2; t) \Psi^*(q + v/2; t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{2\pi\hbar} \exp\left(\frac{i}{\hbar} qu\right) \Phi(p + u/2; t) \Phi^*(p - u/2; t) \end{aligned} \quad (50)$$

e

$$\begin{aligned} (ii) \quad W(p, q; t) &= 2\pi\hbar \exp\left(\frac{\hbar}{2i} \frac{\partial^2}{\partial p \partial q}\right) \text{Tr} [\rho(t) \delta(q - \mathbf{Q}) \delta(p - \mathbf{P})] \\ &= \sqrt{2\pi\hbar} \exp\left(\frac{\hbar}{2i} \frac{\partial^2}{\partial p \partial q}\right) \left[\exp\left(\frac{i}{\hbar} pq\right) \Phi(p; t) \Psi^*(q; t) \right]. \end{aligned} \quad (51)$$

Como o operador densidade é hermiteano, a função $W(p, q; t)$ é real e conseqüentemente,

$$W(p, q; t) = \sqrt{2\pi\hbar} \exp\left(-\frac{\hbar}{2i} \frac{\partial^2}{\partial p \partial q}\right) \left[\exp\left(-\frac{i}{\hbar} pq\right) \Phi^*(p; t) \Psi(q; t) \right]. \quad (52)$$

A terceira propriedade decorre da desigualdade de Cauchy-Schwarz, isto é,

$$|W(p, q; t)|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dv}{2\pi\hbar} |\Psi(q - v/2; t)|^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{2\pi\hbar} |\Psi(q + u/2; t)|^2 = \frac{1}{(\pi\hbar)^2}. \quad (53)$$

A desigualdade $|W(p, q; t)| \leq \frac{2}{\hbar}$ ($h = 2\pi\hbar$) implica que a função de Wigner é diferente de zero numa região cuja área do espaço de fase é menor ou igual a $\frac{h}{2}$ [21]. Portanto, tal função traz embutida a informação básica do princípio de incerteza: esta não pode ser localizada tanto em p quanto em q , o que nos leva a concluir que as distribuições delta de Dirac estão descartadas neste contexto. De fato, este espaço de fase não é apenas uma outra representação do espaço de fase clássico, mas sim um representante legítimo de um espaço de estados com sua estrutura celulada devido ao princípio de incerteza [10]. Além disso, a função de Wigner $W(p, q; t)$ pode assumir valores negativos, o que justifica a termos designado de quase-distribuição.

IV.1 A equação de von Neumann-Liouville

A evolução temporal da função de Wigner é uma conseqüência imediata da equação de von Neumann-Liouville para o operador densidade $\rho(t)$,

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(t) = \frac{1}{i\hbar} [\mathbf{H}, \rho(t)], \quad (54)$$

no qual \mathbf{H} é o hamiltoniano do sistema que *independe do tempo*. De fato, realizando-se a transformada de Weyl desta equação obtemos como resultado

$$\frac{\partial}{\partial t} W(p, q; t) = \frac{2}{\hbar} \sin \left[\frac{\hbar}{2} \left(\frac{\partial^{(H)}}{\partial q} \frac{\partial^{(W)}}{\partial p} - \frac{\partial^{(H)}}{\partial p} \frac{\partial^{(W)}}{\partial q} \right) \right] H(p, q) W(p, q; t), \quad (55)$$

sendo $H(p, q)$ a transformada de Weyl do operador \mathbf{H} . Para resolver essa equação, vamos definir o operador Liouvilliano quântico

$$\mathbf{L}(p, q) = \frac{2i}{\hbar} \sin \left[\frac{\hbar}{2} \left(\frac{\partial^{(H)}}{\partial q} \frac{\partial^{(W)}}{\partial p} - \frac{\partial^{(H)}}{\partial p} \frac{\partial^{(W)}}{\partial q} \right) \right] H(p, q),$$

o qual permite-nos reescrever a Eq.(55) da seguinte forma:

$$\frac{\partial}{\partial t} W(p, q; t) = -i\mathbf{L}(p, q) W(p, q; t). \quad (56)$$

A solução formal desta equação é dada por

$$W(p, q; t) = \exp[-i\mathbf{L}(p, q)(t - t_0)] W(p, q; t_0). \quad (57)$$

Nesta expressão, observamos que a dependência em \hbar da função de Wigner $W(p, q; t)$ é proveniente de duas fontes: $W(p, q; t_0)$ e $\mathbf{L}(p, q)$.

Para um sistema físico qualquer, cuja forma mapeada do operador hamiltoniano seja

$$H(p, q) = \frac{p^2}{2m} + V(q), \tag{58}$$

a função de Wigner $W(p, q; t)$ obedece a equação diferencial parcial [21]

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{p}{m} \frac{\partial}{\partial q} - \frac{dV(q)}{dq} \frac{\partial}{\partial p} \right) W(p, q; t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \left(\frac{\hbar}{2} \right)^{2k} \frac{d^{2k+1}V(q)}{dq^{2k+1}} \frac{\partial^{2k+1}}{\partial p^{2k+1}} W(p, q; t), \tag{59}$$

a qual é prontamente obtida através da Eq. (56). Ao fixarmos $\hbar = 0$ nesta equação, o que é equivalente a considerarmos uma evolução clássica para $W(p, q; t)$, verificamos que esta recupera a equação de Liouville da Mecânica Estatística Clássica,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{p}{m} \frac{\partial}{\partial q} - \frac{dV(q)}{dq} \frac{\partial}{\partial p} \right) W(p, q; t) = 0.$$

Portanto, o lado direito da Eq. (59) pode ser interpretado como um termo adicional que introduz correções quânticas à equação de Liouville Clássica.

Exemplo 4 *A complexidade em resolver a equação diferencial parcial (59) está diretamente associada a natureza da energia potencial $V(q)$ do sistema físico que estamos abordando. Recentemente, alguns sistemas sujeitos a potenciais do tipo Morse, Pöschl-Teller e oscilador harmônico modificado (OHM), foram investigados e suas respectivas funções de Wigner calculadas através das funções de onda para os estados estacionários [28, 29]. Por exemplo, ao considerarmos*

$$V(q) = \begin{cases} D \left[(1 - e^{-\beta q})^2 - 1 \right], & D > 0 \text{ e } \beta^{-1} > 0 & \text{(Morse)} \\ -V_0 \cosh^{-2}(aq), & V_0 = \hbar^2 a^2 / m \text{ e } a > 0 & \text{(Pöschl-Teller)} \\ \frac{\hbar^2 \alpha^2}{2m} [(\alpha q)^2 - 2(\alpha q) \tanh(\alpha q)], & \alpha > 0 & \text{(OHM)} \end{cases}$$

temos que

$$\frac{d^{2k+1}V(q)}{dq^{2k+1}} = \begin{cases} 4D\beta(2\beta^2)^k e^{-3\beta q/2} \sinh\left(\frac{\beta q}{2} - k \ln 2\right), & \forall q & \text{(Morse)} \\ \frac{2V_0}{a} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m (2am)^{2(k+1)} e^{-2aqm}, & q \geq 0 & \text{(Pöschl-Teller)} \\ -\frac{2\hbar^2 \alpha^3}{m} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m (2\alpha m)^{2k} [1 + 2(k - \alpha qm)] e^{-2\alpha qm}, & q > 0 & \text{(OHM)} \end{cases}$$

para $k \geq 1$, o que nos leva a obter diferentes contribuições em ordens de \hbar para cada potencial em questão. Em particular, as funções de Wigner para $t_0 = 0$ podem ser encontradas nas referências supracitadas, restando apenas realizar um estudo detalhado acerca da evolução temporal clássica e como as diferentes contribuições de \hbar afetam tal evolução.

Em seguida, iremos investigar o limite $\hbar \rightarrow 0$ de $\mathbf{L}(p, q)$. Para tanto, vamos definir o operador

$$\overset{\leftrightarrow}{\Lambda} \equiv \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial q} \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial p} - \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial p} \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial q}$$

e introduzir um parâmetro adimensional α no Liouvilliano quântico de forma a reescrevê-lo como segue:

$$\mathbf{L}_\alpha(p, q) = \frac{2i}{\hbar\alpha} \sin\left(\frac{\hbar\alpha}{2} \overset{\leftrightarrow}{\Lambda}\right) H(p, q).$$

Supondo que a função $H(p, q)$ não dependa de \hbar , a expansão em série de potências do operador

$$\mathbf{L}_\alpha(p, q) = \frac{2i}{\hbar\alpha} \left[\frac{\hbar\alpha}{2} \overset{\leftrightarrow}{\Lambda} - \frac{1}{3!} \left(\frac{\hbar\alpha}{2} \right)^3 \left(\overset{\leftrightarrow}{\Lambda} \right)^3 + \dots \right] H(p, q),$$

permite-nos realizar o limite $\alpha \rightarrow 0$ conforme o procedimento

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \mathbf{L}_\alpha(p, q) = i \overset{\leftrightarrow}{\Lambda} H(p, q) = \mathbf{L}_0(p, q),$$

sendo $\mathbf{L}_0(p, q)$ um operador clássico. Nesse sentido, a evolução temporal (56) tem por solução

$$W_0(p, q; t) = \exp[-i\mathbf{L}_0(p, q)(t - t_0)] W(p, q; t_0), \quad (60)$$

ou considerando um passo anterior,

$$\frac{\partial W_0}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial q} \frac{\partial W_0}{\partial p} - \frac{\partial H}{\partial p} \frac{\partial W_0}{\partial q} = \{H, W_0\} \quad (61)$$

em que $\{H, W_0\}$ representa o parênteses de Poisson das funções $H(p, q)$ e $W_0(p, q; t)$. Dessa forma, a Eq.(60) descreve a evolução clássica do objeto quântico $W(p, q; t_0)$. Em suma, a introdução do parâmetro α nos leva a tratar de forma independente os limites $\hbar \rightarrow 0$ na função de Wigner e na sua evolução temporal [11].

Exemplo 5 *Considere o operador hamiltoniano do oscilador harmônico unidimensional*

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{P}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\mathbf{Q}^2, \quad (62)$$

assim como a sua forma mapeada

$$H(p, q) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2q^2, \quad (63)$$

a qual independe de \hbar . Para calcularmos a evolução temporal da função de Wigner $W_n(p, q; t)$ através da Eq. (57), devemos em princípio estabelecer uma expressão formal para o operador Liouvilliano quântico $\mathbf{L}(p, q)$ associado ao sistema físico em estudo, que para o nosso caso é dado por

$$\mathbf{L}(p, q) = i\omega \left[\frac{q}{b} \frac{\partial}{\partial(bp/\hbar)} - \frac{bp}{\hbar} \frac{\partial}{\partial(q/b)} \right] = \mathbf{L}_0(p, q) \quad (b^2 = \hbar/m\omega). \quad (64)$$

Note que este operador não possui qualquer dependência em \hbar , levando-nos assim a uma evolução clássica da função de Wigner quântica $W_n(p, q)$ para $t_0 = 0$,

$$W_n(p, q; t) = \exp[-it\mathbf{L}_0(p, q)] W_n(p, q), \quad (65)$$

com $W_n(p, q)$ dado pela Eq. (31). Em seguida, vamos realizar a transformação de variáveis

$$\begin{cases} \frac{q}{b} = \text{Re}(\alpha) = r \cos \theta \\ \frac{bp}{\hbar} = \text{Im}(\alpha) = r \sin \theta \end{cases} \quad \text{com} \quad \begin{cases} r^2 = \frac{q^2}{b^2} + \frac{b^2 p^2}{\hbar^2} = |\alpha|^2 \\ \theta = \arctan\left(\frac{b^2 p}{\hbar q}\right) = \arctan\left[\frac{\text{Im}(\alpha)}{\text{Re}(\alpha)}\right] \end{cases}$$

na Eq. (65), o qual permite-nos obter um resultado importante. Para tanto, devemos inicialmente recorrer as relações auxiliares

$$\frac{\partial}{\partial(bp/\hbar)} = \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \quad e \quad \frac{\partial}{\partial(q/b)} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta},$$

de maneira a reescrever o operador clássico $\mathbf{L}_0(p, q)$ como $\mathbf{L}_0(\theta) = i\omega \frac{\partial}{\partial \theta}$. Consequentemente, temos que

$$W_n(r; t) = \exp\left(-i\omega t \frac{\partial}{\partial \theta}\right) W_n(r) = W_n(r) \quad \implies \quad W_n(p, q; t) = W_n(p, q), \quad (66)$$

ou seja, a função de Wigner associada ao autoestado do operador hamiltoniano (62) não evolui temporalmente. Este fato pode ser explicado com o auxílio do operador evolução temporal

$$\mathbf{U}(t) = \exp\left(-\frac{it}{\hbar} \mathbf{H}\right) = e^{-i\omega t/2} \mathbf{R}(\omega t), \quad (67)$$

no qual $\mathbf{R}(\omega t) = \exp(-i\omega t \mathbf{a}^\dagger \mathbf{a})$ refere-se ao operador rotação, sendo

$$\mathbf{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \mathbf{Q} + i \frac{\mathbf{P}}{\sqrt{m\omega\hbar}} \right) \quad e \quad \mathbf{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \mathbf{Q} - i \frac{\mathbf{P}}{\sqrt{m\omega\hbar}} \right)$$

os operadores aniquilação e criação, respectivamente. Dessa forma, ao calcularmos a função de Wigner $W_n(p, q; t)$ por intermédio da Eq. (50),

$$\begin{aligned} W_n(p, q; t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dv}{2\pi\hbar} \exp\left(\frac{i}{\hbar} pv\right) \langle q - v/2 | \mathbf{U}(t) | n \rangle \langle n | \mathbf{U}^\dagger(t) | q + v/2 \rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dv}{2\pi\hbar} \exp\left(\frac{i}{\hbar} pv\right) \left[e^{-i\omega t(n+1/2)} \langle q - v/2 | n \rangle \right] \left[e^{i\omega t(n+1/2)} \langle n | q + v/2 \rangle \right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dv}{2\pi\hbar} \exp\left(\frac{i}{\hbar} pv\right) \Psi_n(q - v/2) \Psi_n^*(q + v/2) \\ &= W_n(p, q), \end{aligned}$$

verificamos que o operador evolução temporal introduz apenas uma fase global e esta não apresenta nenhuma contribuição para o cálculo. De maneira análoga, o mesmo pode ser constatado para a Eq. (51),

$$\begin{aligned} W_n(p, q; t) &= \sqrt{2\pi\hbar} \exp\left(\frac{\hbar}{2i} \frac{\partial^2}{\partial p \partial q}\right) \left[\exp\left(\frac{i}{\hbar} pq\right) \langle p | \mathbf{U}(t) | n \rangle \langle n | \mathbf{U}^\dagger(t) | q \rangle \right] \\ &= \sqrt{2\pi\hbar} \exp\left(\frac{\hbar}{2i} \frac{\partial^2}{\partial p \partial q}\right) \left\{ \exp\left(\frac{i}{\hbar} pq\right) \left[e^{-i\omega t(n+1/2)} \langle p | n \rangle \right] \left[e^{i\omega t(n+1/2)} \langle n | q \rangle \right] \right\} \\ &= \sqrt{2\pi\hbar} \exp\left(\frac{\hbar}{2i} \frac{\partial^2}{\partial p \partial q}\right) \left[\exp\left(\frac{i}{\hbar} pq\right) \Phi_n(p) \Psi_n^*(q) \right] \\ &= W_n(p, q), \end{aligned}$$

corroborando assim com o resultado obtido anteriormente.

Agora, para encontrarmos uma expressão associada a derivada temporal do valor esperado de um observável \mathbf{F} , basta lembrarmos da Eq.(49). Com isso, temos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \mathbf{F} \rangle_t &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp dq}{2\pi\hbar} f(p, q) \frac{\partial}{\partial t} W(p, q; t) \\ &= -i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp dq}{2\pi\hbar} f(p, q) [\mathbf{L}(p, q) W(p, q; t)] \\ &= i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp dq}{2\pi\hbar} [\mathbf{L}(p, q) f(p, q)] W(p, q; t) \\ &= -\frac{2}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp dq}{2\pi\hbar} \sin \left[\frac{\hbar}{2} \left(\frac{\partial^{(H)}}{\partial q} \frac{\partial^{(f)}}{\partial p} - \frac{\partial^{(H)}}{\partial p} \frac{\partial^{(f)}}{\partial q} \right) \right] H(p, q) f(p, q) W(p, q; t), \end{aligned} \quad (68)$$

no qual a terceira igualdade foi obtida através da integração por partes e lembrando que $W(p, q; t)$ se anula nos limites $p(q) \rightarrow \pm\infty$. Em particular, ao considerarmos os operadores momentum e posição, ficamos com

$$\frac{d}{dt} \langle \mathbf{P} \rangle_t = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp dq}{2\pi\hbar} \frac{\partial H}{\partial q} W(p, q; t) \quad (69)$$

e

$$\frac{d}{dt} \langle \mathbf{Q} \rangle_t = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp dq}{2\pi\hbar} \frac{\partial H}{\partial p} W(p, q; t), \quad (70)$$

as quais representam a transformada de Weyl das equações de Ehrenfest da formulação usual da Mecânica Quântica. Para $\hbar \rightarrow 0$, a função de Wigner é equivalente ao produto $\delta(p - p_0)\delta(q - q_0)$ e as expressões acima recuperam as equações clássicas de Hamilton

para $H_{cl}(p_0, q_0)$,

$$\frac{dp_0}{dt} = -\frac{\partial H_{cl}}{\partial q_0} \quad \text{e} \quad \frac{dq_0}{dt} = \frac{\partial H_{cl}}{\partial p_0}. \quad (71)$$

Resumindo, nesta última seção conseguimos recuperar a Mecânica Clássica e as equações fundamentais que governam a evolução temporal de valores médios dos observáveis físicos através de um processo limite formal, o qual permite obter uma descrição do espaço de fase clássico a partir de um espaço de fase quântico.

V Considerações Finais

O objetivo central deste trabalho é apresentar uma contribuição para a literatura científica em língua portuguesa de um tema fascinante e de grande aplicabi-

lidade nos diversos ramos da Física. Para tanto, utilizamos de alguns conceitos matemáticos que são geralmente ensinados nos cursos de Mecânica Quântica da graduação e pós-graduação, de modo a compilar um texto didático e rigoroso acerca da formulação de Weyl-Wigner da Mecânica Quântica no espaço de fase, possibilitando ao leitor uma rápida assimilação e um eventual aprofundamento no tema. De fato, para os leitores ávidos por informação recomendo a leitura das referências [16, 17] e mais recentemente, o excelente livro de W.P. Schleich [21] que traz um número razoável de aplicações em Óptica Quântica. Em suma, espero que o texto aqui apresentado cumpra sua finalidade e sirva de incentivo para alunos e professores na busca incessante por novos conhecimentos.

Agradecimentos

O autor gostaria de agradecer o convite feito pelo Prof. Esmerindo Bernardes (IFSC-USP) para ministrar um dos tópicos abordados no curso de verão e ao incentivo constante em escrever este material, ao Prof. Diógenes Galetti (IFT-UNESP) pela leitura cuidadosa e comentários pertinentes, além do apoio financeiro propiciado pela FAPESP através dos processos 01/11209-0 e 00/15084-5.

Referências

- [1] H. Weyl, *Z. Phys.* **46**, 1 (1927).
- [2] E. Wigner, *Phys. Rev.* **40**, 749 (1932).
- [3] A.M.O. de Almeida, *Sistemas Hamiltonianos: Caos e Quantização*, Editora da Unicamp, Campinas, segunda edição (1991).
- [4] M.C. Gutzwiller, *Chaos in Classical and Quantum Mechanics*, Springer-Verlag, New York (1990).
- [5] Y.S. Kim e M.E. Noz, *Phase Space Picture of Quantum Mechanics (Group Theoretical Approach)*, Lecture Notes in Physics Series Vol. 40, World Scientific, Singapore (1991).
- [6] D.T. Smithey, M. Beck, M.G. Raymer e A. Faridani, *Phys. Rev. Lett.* **70**, 1244 (1993). Ver também: Ulf Leonhardt, *Measuring the Quantum State of Light*, Cambridge, New York (1997).
- [7] D. Leibfried, D.M. Meekhof, B.E. King, C. Monroe, W.M. Itano e D.J. Wineland, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 4281 (1996).
- [8] L.G. Lutterbach e L. Davidovich, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 2547 (1997).
- [9] R.L. de Matos Filho e W. Vogel, *Phys. Rev. A* **58**, R1661 (1998).
- [10] D. Galetti, *Mecânica Quântica no Espaço de Fase*, Notas de aula da III Escola Mário Schenberg do Departamento de Física da UFPB, João Pessoa (1996).
- [11] M.C. Tijero, *Aproximações Semiclássicas nos Processos de Colisões Atômico-Moleculares*, Tese de doutoramento apresentada no Instituto de Física Teórica (UNESP), IFT-T.004/94 (1994).
- [12] H. Weyl, *The Theory of Groups and Quantum Mechanics*, Dover, New York (1950).
- [13] B. Leaf, *J. Math. Phys.* **9**, 65 e 769 (1968).
- [14] N.L. Balaz e B.K. Jennings, *Phys. Rep.* **104**, 347 (1984).
- [15] W.H. Louisell, *Quantum Statistical Properties of Radiation*, John Wiley & Sons, New York (1990).
- [16] M. Hillery, R.F. O'Connell, M.O. Scully e E.P. Wigner, *Phys. Rep.* **106**, 121 (1984).
- [17] H-W. Lee, *Phys. Rep.* **259**, 147 (1995).
- [18] I.S. Gradshteyn e I.M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products*, Academic Press, San Diego (1980).
- [19] M.O. Scully e M.S. Zubairy, *Quantum Optics*, Cambridge University Press, New York (1997).
- [20] M. Orszag, *Quantum Optics*, Springer-Verlag, Berlin (2000).
- [21] W.P. Schleich, *Quantum Optics in Phase Space*, Wiley-VCH, Berlin (2001).
- [22] W. Vogel, D-G. Welsch e S. Wallentowitz, *Quantum Optics: An Introduction*, Wiley-VCH, Berlin (2001).
- [23] H. Groenewold, *Physica* **12**, 405 (1946).
- [24] T. Curtright, T. Uematsu e C. Zachos, *Generating all Wigner functions*, hep-th/0011137 v2 (2001).
- [25] L. Castellani, *Class. Quant. Grav.* **17**, 3377 (2000).
- [26] N.C. Dias e J.N. Prata, *Causal Interpretation and Quantum Phase Space*, quant-ph/0110062 (2001).
- [27] O.V. Man'ko, V.I. Man'ko e G. Marmo, *J. Phys. A: Math. Gen.* **35**, 699 (2002).
- [28] A. Frank, A.L. Rivera e K.B. Wolf, *Phys. Rev. A* **61**, 054102 (2000).
- [29] G.W. Bund e M.C. Tijero, *Phys. Rev. A* **61**, 052114 (2000).