INTRODUÇÃO DA IDEIA DE FRAÇÃO E FRAÇÕES EQUIVALENTES EM LIVROS DIDÁTICOS BRASILEIROS DO SÉCULO XX

Introduction of the Concept of Fraction and Equivalent Fractions in 20th-Century Brazilian Mathematics Textbooks

Introducción de la idea de fracción y de las fracciones equivalentes en libros de texto brasileños de matemáticas del siglo XX

PAMELA GONÇALVES*, VITÓRIA FENILLI VIDALETTI, DULCYENE MARIA RIBEIRO
Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Cascavel, PR, Brasil.
*Autora correspondente. *E-mail: pangoncalves@gmail.com.*

Resumo: Este artigo trata da abordagem do conteúdo de frações em livros didáticos brasileiros de matemática publicados em diferentes períodos no século XX. Assim, o objetivo é compreender como as frações são introduzidas e como as frações equivalentes são apresentadas em livros didáticos brasileiros de matemática. Trata-se de uma pesquisa histórica, que teve os livros didáticos como fonte. As análises revelam que os livros sofreram mudanças ao longo do tempo, especialmente na forma de explicitação dos conteúdos, como o uso crescente de imagens, cores, representações geométricas e a inserção de situações do cotidiano. As abordagens das noções introdutórias das frações e das frações equivalentes refletem as mudanças curriculares que ocorreram ou vigoravam no período em que os livros foram publicados, como as regras para cálculo do m.m.c. nos livros da década de 1960, a abordagem das frações por classe de equivalência no período do MMM e uma abordagem mais intuitiva e contextualizada nos livros do último período analisado.

Palavras-chave: educação matemática; Movimento da Matemática Moderna (MMM); frações equivalentes.

Abstract: This article examines the treatment of the concept of fractions in Brazilian mathematics textbooks published across different periods of the 20th century. The objective is to understand how fractions are introduced and how equivalent fractions are presented in these materials. The study adopts a historical research perspective, using textbooks as primary sources. The findings indicate that textbooks changed over time, particularly in how content was made explicit, with an increasing incorporation of visual elements, color, geometric representations, and everyday contextual situations. The ways in which introductory notions of fractions and of equivalent fractions are addressed reflect the curricular transformations underway or in effect at the time of publication—for example, the emphasis on rules for calculating the least common multiple (LCM) in textbooks from the 1960s, the treatment of fractions through equivalence classes during the Modern Mathematics Movement (MMM), and a more intuitive, context-based approach in the most recent period analyzed.
Keywords: mathematics education; Modern Mathematics Movement (MMM); equivalent fractions.

Resumen: Este artículo analiza el tratamiento del contenido de las fracciones en libros de texto brasileños de matemáticas publicados en distintos períodos del siglo XX. El objetivo es comprender cómo se introducen las fracciones y cómo se presentan las fracciones equivalentes en estos materiales. Se trata de una investigación de carácter histórico que utiliza los libros de texto como fuente principal. Los resultados muestran que estos libros cambiaron a lo largo del tiempo, especialmente en la explicitación de los contenidos, con una incorporación creciente de elementos visuales, colores, representaciones geométricas y situaciones contextualizadas de la vida cotidiana. Las formas de abordar las nociones introductorias de las fracciones y de las fracciones equivalentes reflejan las transformaciones curriculares en curso o vigentes en el momento de su publicación; entre ellas, el énfasis en las reglas para el cálculo del mínimo común múltiplo (m.c.m.) en los libros de la década de 1960, el tratamiento de las fracciones mediante clases de equivalencia durante el Movimiento de la Matemática Moderna (MMM) y un enfoque más intuitivo y contextualizado en el período más reciente analizado.

Palabras clave: educación matemática; Movimiento de la Matemática Moderna (MMM); fracciones equivalentes.

https://doi.org/10.4025/rbhe.v25.2025.e384
e-ISSN: 2238-0094

INTRODUÇÃO

O presente artigo é resultado de estudos desenvolvidos em uma disciplina intitulada "Aspectos da História e Historiografia da Educação Matemática" do programa de pós-graduação *stricto sensu*, Educação em Ciências e Educação Matemática (PPGECEM), da Universidade Estadual do Oeste do Paraná – Unioeste, campus Cascavel.

O Movimento da Matemática Moderna (MMM) foi um importante acontecimento que proporcionou discussões sobre o ensino da matemática e "[...] prometia a superação de um ensino elitista e ineficaz, promovendo o interesse, a curiosidade e a aprendizagem" (Búrigo, 2006, p. 42). Este movimento foi resultante de debates sobre a necessária renovação do ensino da matemática no Brasil e no mundo, a partir do final dos anos de 1950 (Alves, 2020).

Aspectos do MMM que impactaram o ensino de matemática podem ser notados nos livros didáticos. De acordo com Valente (2008), esses materiais, de outras épocas, revelam-se como um meio para a pesquisa da história da educação matemática. Dessa forma, este estudo objetiva compreender como as frações são introduzidas e como as frações equivalentes são apresentadas em livros didáticos brasileiros de matemática, buscando evidenciar possíveis características comuns e de que forma eram abordadas antes, durante e após o MMM.

Os livros foram organizados e selecionados em ordem cronológica, respeitando parâmetros de *antes* do MMM: *1ª Série Ginasial da Coleção Matemática Curso Ginasial*, de Osvaldo Sangiorgi (1955) e *Primeira Série Ginasial da Coleção Matemática*, de Ary Quintella (1959); *durante* o MMM: *Matemática 1: Curso Moderno, volume 1 para os ginásios*, de Osvaldo Sangiorgi (1966) e *Matemática, Para a Primeira Série Ginasial*, de Ary Quintella (1966); e *após* o MMM: *Matemática Atual*, de Antônio José Lopes Bigode (1994) e *A Conquista da Matemática*, dos autores José Ruy Giovanni, Benedito Castrucci e José Ruy Giovanni Jr (1998).

Em relação à natureza do estudo, trata-se de uma pesquisa histórica que se deu por meio de leitura exploratória das abordagens sobre o conteúdo de frações presentes nas obras. Intentamos relacionar o percurso histórico do MMM no Brasil e seus impactos nos livros didáticos, discorrendo sobre algumas características representadas na organização e descrição do conteúdo de frações. De acordo com Pinto (2009, p. 64), o MMM no Brasil reestruturou significativamente os "conteúdos programáticos dos cursos ginasiais", causando impactos na produção de livros didáticos de matemática.

A escolha relativa ao conteúdo de frações se deu em razão do interesse pela temática, uma vez que esse conteúdo é tratado em vários anos de escolarização. Já quanto à escolha dos livros, a disponibilidade de acesso a essas obras foi o fator determinante. Além disso, os livros selecionados e seus autores marcaram as suas

respectivas épocas. Acerca disso, Valente (2008, p. 152) destaca que tanto Ary Quintella quanto Osvaldo Sangiorgi "transformaram-se em *best-sellers* para a educação matemática brasileira".

Sobre Ary Quintella, Valente (2008, p. 154) salienta que, "no início dos anos 1950, suas obras para o ginásio e para o colégio alcançaram várias dezenas de edições", além disso, "[...] participou da organização dos programas de matemática para os cursos comercial básico e técnico, a convite do Ministro da Educação, além de atuar em numerosas comissões e bancas de concursos de professores de matemática". Segundo Búrigo (2008, p. 43), os registros do MMM no Brasil e "[...] as referências a Osvaldo Sangiorgi são tão frequentes que a compreensão do seu protagonismo e do próprio movimento [...] tentem a se fundir". Ademais, Sangiorgi atuou como autor, organizador e divulgador das propostas de renovação do ensino de matemática.

De acordo com Alves (2005), Antônio José Lopes, conhecido como Bigode[1], relaciona a Educação Matemática ao final dos anos 70, considerando esse período como de consolidação do movimento no Brasil, e não de início, tendo então a Educação Matemática brasileira sido reconhecida internacionalmente e adquirido uma identidade como área do conhecimento.

No que diz respeito à Castrucci, Duarte (2007) comenta que sua adesão ao MMM lhe rendeu a publicação de várias obras, como *Geometria: curso moderno*, de 1967 e 1969. E, em parceria com o Grupo de Estudos do Ensino da Matemática (GEEM), publicou *Introdução à lógica matemática* (1973) e *Elementos da teoria dos conjuntos* (1967). O GEEM de São Paulo ficou responsável pelos assuntos relativos à Matemática Moderna (MM), a partir da qual sua obra *Matemática moderna para o ensino secundário* procurou introduzir as ideias de conjuntos e estruturas, que se constituem no fundamento da Matemática Moderna.

José Ruy Giovanni e seu filho, José Ruy Giovanni Júnior, são autores de livros didáticos de matemática no Brasil. Com uma vasta experiência no ensino da disciplina, suas obras têm sido amplamente utilizadas em instituições de ensino fundamental e médio em todo o país. Uma de suas coleções mais reconhecidas é "A Conquista da Matemática", destinada ao Ensino Fundamental II. Esta série abrange do 6º ao 9º ano e é conhecida por sua abordagem didática que facilita a compreensão dos conceitos matemáticos pelos alunos.

Para as análises, optamos por agrupar as obras em duplas e por períodos. Nominamos e estabelecemos uma separação entre os períodos: antes, durante e após o MMM, fazendo uma classificação em função do momento em que foram produzidas. O quadro 1 especifica as obras selecionadas.

[1] O nome "Bigode" passou a ser adotado na ocasião da escrita dos livros didáticos. De acordo com o site "O Baricentro da Mente", "o nome 'Bigode' foi adotado quando publicou seus primeiros livros. Seu editor na época sugeriu que usar o nome Antônio José Lopes não iria 'pegar' e que melhor seria se usasse simplesmente Bigode, e desde então vem utilizando em suas publicações." (O Baricentro da Mente, 2018, *on-line*).

Quadro 1 – Relação das obras analisadas

Antes do MMM	Durante o MMM	Após o MMM
1ª Série Ginasial da Coleção Matemática Curso Ginasial, 11ª edição, publicado pela Editora Nacional em 1955, de Osvaldo Sangiorgi.	*Matemática 1: Curso Moderno*, volume 1 para os ginásios, 5ª edição, publicado pela Editora Nacional em 1966, de Osvaldo Sangiorgi.	*Matemática Atual*, publicado pela editora Atual em 1994, de Antônio José Lopes Bigode.
Primeira Série Ginasial da Coleção Matemática, 68ª edição, publicado pela Editora Nacional em 1959, de Ary Quintella.	*Matemática, Para a Primeira Série Ginasial,* 121ª edição, publicado pela Editora Nacional em 1966, de Ary Quintella.	*A Conquista da Matemática*, publicado pela editora FTD em 1998, dos autores José Ruy Giovanni, Benedito Castrucci e José Ruy Giovanni Jr.

Fonte: As autoras (2024).

Corroborando o estudo em questão, Valente (2008, p. 151) afirma que os livros didáticos representam fontes importantes para a análise do ensino de matemática sob uma perspectiva histórica:

> Talvez seja possível dizer que a matemática se constitua na disciplina que mais tem a sua trajetória histórica atrelada aos livros didáticos. Das origens de seu ensino como saber técnico militar, passando por sua ascendência a saber de cultura geral escolar, a trajetória histórica de constituição e desenvolvimento da matemática escolar no Brasil pode ser lida nos livros didáticos.

Portanto, o livro didático é um dos responsáveis pela constituição do conhecimento que, historicamente, foi transmitido pelos manuais ao longo da vida escolar das crianças e jovens.

Breve contextualização do Movimento da Matemática Moderna (MMM) no Brasil

Ao final da Segunda Guerra Mundial, nos Estados Unidos e em alguns países do continente europeu, foram surgindo comissões e ocorrendo congressos em que se discutia a reforma do Ensino Secundário[2] de Matemática, uma vez que era necessário

[2] "Art. 1º O ensino secundário tem as seguintes finalidades: 1. Formar, em prosseguimento da obra educativa do ensino primário, a personalidade integral dos adolescentes; 2. Acentuar a elevar, na formação espiritual dos adolescentes, a consciência patriótica e a consciência humanística; 3. Dar preparação intelectual geral que possa servir de base a estudos mais elevados de formação especial. Art. 2º O ensino secundário será ministrado em dois ciclos. O primeiro compreenderá um só curso:

adequar seu ensino ao emergente avanço científico, técnico e econômico permeado de novas tecnologias. Assim, iniciativas de reforma do ensino de matemática foram desenvolvidas entre meados dos anos 1950 e parte dos anos 1970, adquirindo a forma de um movimento internacional, conhecido como Matemática Moderna (Matos & Valente, 2010).

No Brasil, a vertente dessas mudanças ficou conhecida como Movimento da Matemática Moderna (MMM). Inicialmente, os promotores pretendiam reconfigurar o programa do ensino de matemática no curso ginasial[3], ampliando posteriormente seu espaço de atuação para o curso primário. O MMM procurava aproximar a matemática ensinada no ensino básico àquela desenvolvida pelos pesquisadores e ensinada nos cursos superiores. De acordo com Sangiorgi (1966, p. 1), "é preciso superar, com trabalho honesto e construtivo, a herança de um ensino anacrônico de Matemática".

Alterações de currículo e sistema de ensino foram principalmente baseadas em produções internacionais, como livros e materiais produzidos pelo grupo *School Mathematics Study Group* (SMSG), traduzidos em vários idiomas, com início em 1958 (D'Ambrosio, 1987).

Uma das caraterísticas importantes do período inicial do MMM no Brasil, ou seja, na década de 1960, foi a formação de grupos de professores, como o GEEM[4], o NEDEM[5] e o GEEMPA[6], que atuaram de forma marcante por meio da coordenação de cursos de formação de professores, produção de material escrito e influência no governo, visando a mudanças nos programas de ensino de matemática (Fischer, 2008).

Dentre os nomes em destaque nesse processo, podemos citar Sangiorgi, Castrucci, Jacy Monteiro, Barbosa, Caroli e D'Ambrosio, nomes associados diretamente ao GEEM. Esse grupo foi o principal divulgador do MMM no Brasil (Wielewski, 2008).

Algumas ênfases podem ser identificadas em diferentes aspectos das proposições de programas encaminhadas pelo GEEM e aprovadas no IV Congresso Brasileiro do Ensino da Matemática, realizado em 1962 em Belém do Pará, como lembrar a ausência de significado do anulamento do denominador das frações algébricas, por exemplo (Búrigo, 2006).

Em torno de 1966, ocorriam muitos projetos, seminários e congressos em que se discutiam a formação de professores, adaptações de currículos e materiais

o curso ginasial. O segundo compreenderá dois cursos paralelos: o curso clássico e o curso científico" (Ministério da Educação, 2020, *on-line*).

[3] "Art. 3º O curso ginasial tinha duração de quatro anos e destinava-se a adolescentes fornecendo acesso a elementos fundamentais do ensino secundário" (Ministério da Educação, 2020, *on-line*).

[4] Grupo de Estudos do Ensino da Matemática (GEEM), fundado em outubro de 1961 em São Paulo.

[5] Núcleo de Estudos e Difusão do Ensino da Matemática do Paraná.

[6] Grupo de Estudos sobre o Ensino da Matemática de Porto Alegre, fundado em 1970.

didáticos, promovendo o livro didático como um influente recurso de divulgação das propostas do MMM (D'Ambrosio, 1987).

Em contrapartida, em meados dos anos 1970, o MMM recebia fortes críticas. Segundo Búrigo (1989, p. 211), "[...] a contraposição feita nos programas de matemática moderna entre a álgebra e a geometria euclidiana" gerava problemas de compreensão e, por consequência, evitava que as resoluções fossem feitas por uso da teoria dos conjuntos.

Soares (2001) menciona que o conteúdo de teoria dos conjuntos se popularizou de tal maneira que, em certos momentos, termos como "Matemática Moderna" e "Teoria dos Conjuntos" se fundiam, assumindo significados semelhantes, fazendo com que a teoria dos conjuntos fosse a principal característica da Matemática Moderna.

Assim, o estudo de obras didáticas fornece indícios para a compreensão do MMM, entendido como articulação e movimento organizado, sobretudo no que diz respeito às mudanças expressas nos livros didáticos (Santos, 2015).

FRAÇÕES NOS LIVROS DIDÁTICOS ANTES, DURANTE E APÓS O MMM

Nesta seção apresentaremos a descrição das obras selecionadas, listando características e aspectos relevantes para a nossa investigação sobre o conteúdo de frações, elencando similaridades e diferenças. A ordem dos livros respeita a data da publicação. Os livros foram produzidos ora por grupo de autores, ora por um único autor.

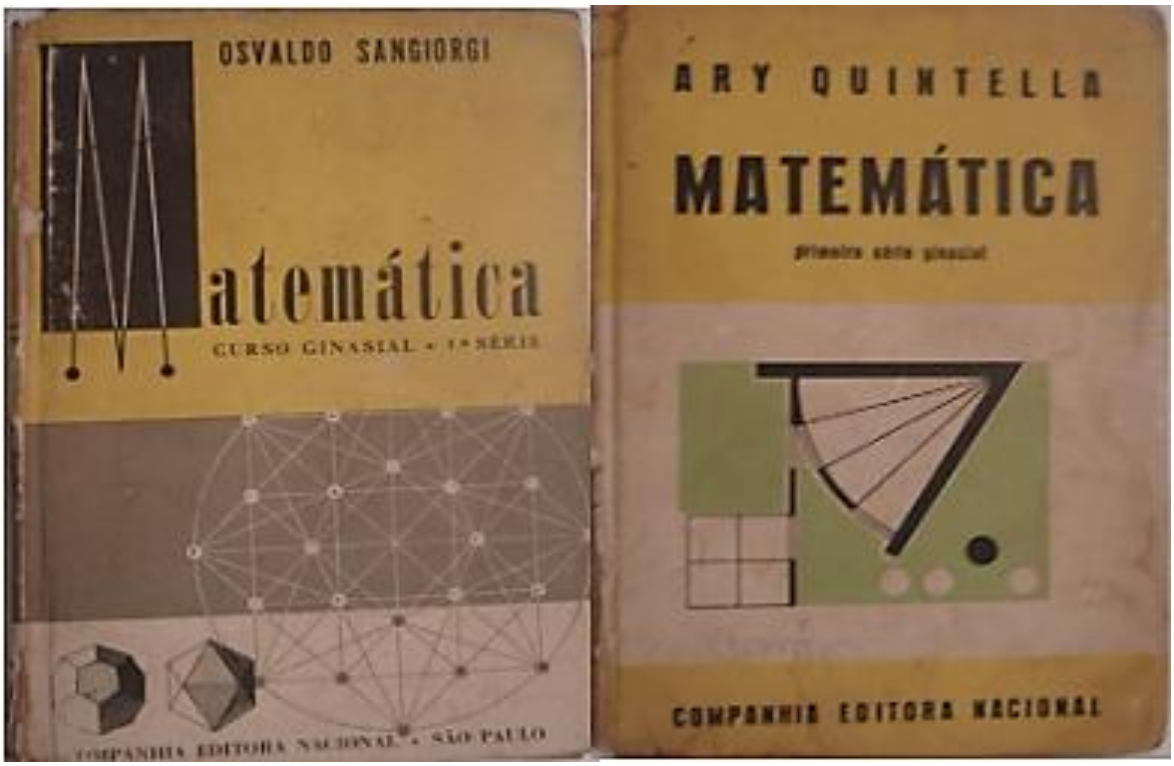
Livros publicados *antes* do Movimento da Matemática Moderna no Brasil

Para este período inicial, selecionamos livros dos autores Ary Quintella e Osvaldo Sangiorgi. Analisaremos os livros: *1ª Série Ginasial da Coleção Matemática Curso Ginasial*, 11ª edição, produzido pela Editora Nacional no ano de 1955, de Osvaldo Sangiorgi, e *Primeira Série Ginasial da Coleção Matemática*, 68ª edição, produzido pela Editora Nacional no ano de 1959, de Ary Quintella, dispostos na Figura 1. Não foi possível precisar o número exato de páginas de ambas as obras, pois fizemos consultas a materiais digitalizados e encontramos exemplares com números divergentes.

Quanto à aparência, ambas exibem uma cartela de cores semelhantes, compartilhando diagramações internas e externas, com representações gráficas na capa e com destaque à palavra matemática. Além disso, trazem ilustrações de figuras geométricas. Quanto aos conteúdos, ambos apresentam seus assuntos distribuídos em quatro capítulos: Números Inteiros, Operações Fundamentais, Números Relativos; Divisibilidade Aritmética, Números Primos; Números Fracionários; Sistema Legal de

Unidades de Medir, Unidades e Medidas Usuais. Segundo Santos (2015), essa organização corresponde aos assuntos estabelecidos pelo Programa Mínimo, para a primeira série ginasial.

Figura 1 – Capa dos livros

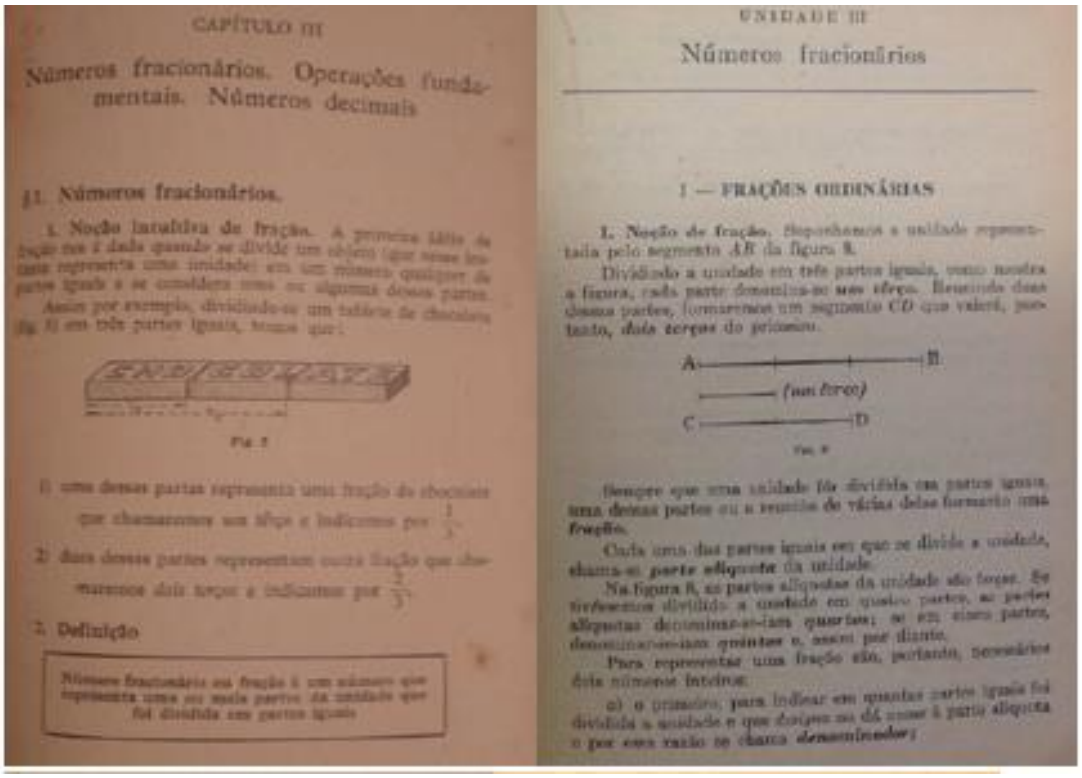


Fonte: Sangiorgi (1955) e Quintella (1959).

Sangiorgi (1955) apresenta a ideia de fração como parte de um objeto, como ilustrado na Figura 2. Desse modo, o autor associa fração à representação da parte de um todo que possa ser igualmente dividido. A partir da ideia de fração, o autor define número fracionário ou fração como "um número que representa uma ou mais partes da unidade que foi dividida em partes iguais" (Sangiorgi, 1955, p. 97).

Tomando uma unidade e sua divisão igualitária (partes alíquotas), Quintella (1959, p. 117) apresenta cada uma dessas partes e define os termos da fração, *numerador* e *denominador*. De acordo com o autor (1959, p. 118), deve-se escrever "o numerador e à sua direita ou abaixo, o denominador, separado por um traço", exemplificando que a representação assume uma das duas formas, $\frac{7}{9}$ ou 7/9. Somente após a apresentação das ideias e dos conceitos iniciais de fração, Quintella (1959, p. 120) apresenta sua definição: "fração é o número formado por uma ou mais partes alíquotas da unidade" e destaca que, para essa definição, o "denominador deve ser pelo menos igual a 2", pois, para o caso de denominador igual a 1, seu valor é, "por definição, igual ao numerador".

Figura 2 – Representação de fração - Sangiorgi (1955) e Quintella (1959)



CAPÍTULO III

Números fracionários. Operações fundamentais. Números decimais

§1. Números fracionários.

2. Definição

UNIDADE III

Números fracionários

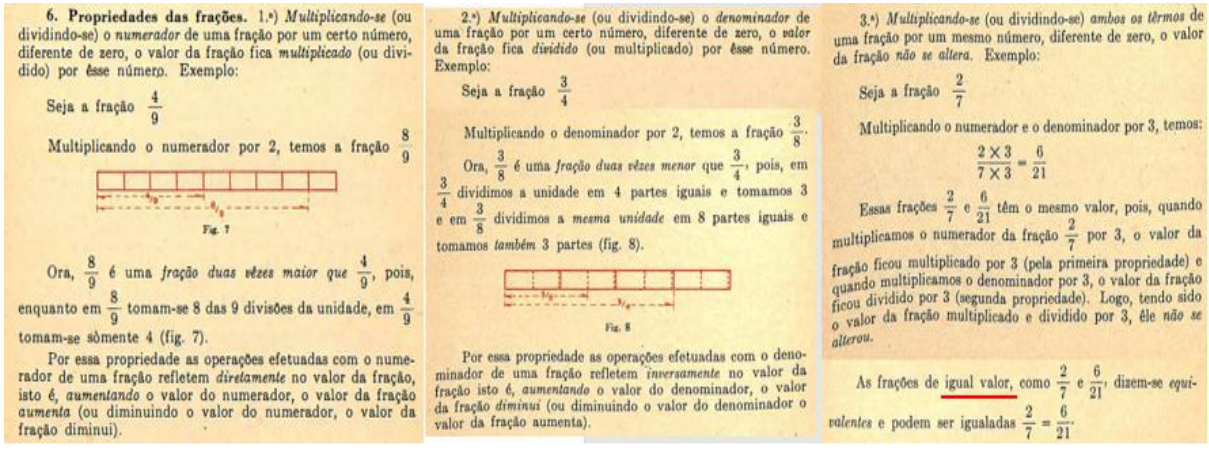
I — FRAÇÕES ORDINÁRIAS

Fonte: Sangiorgi (1955, p. 97) e Quintella (1959, p. 117).

Sangiorgi (1955) e Quintella (1959) consideram a simplificação de uma fração como a divisão de seus termos por um mesmo número, obtendo uma fração igual à dada.

A partir das propriedades ilustradas na Figura 3, Sangiorgi (1955) nomina frações equivalentes como sendo aquelas de *igual valor*. Segundo Santos (2015), na década de 1950, as publicações descreviam o ensino dos números fracionários por meio de técnicas de operações e algumas resoluções de problemas.

Figura 3 – Ilustrações das propriedades de frações - Sangiorgi (1955)



6. Propriedades das frações. 1.ª) *Multiplicando-se* (ou dividindo-se) o *numerador* de uma fração por um certo número, diferente de zero, o valor da fração fica *multiplicado* (ou dividido) por êsse número. Exemplo:

Seja a fração $\frac{4}{9}$

Multiplicando o numerador por 2, temos a fração $\frac{8}{9}$

Fig. 7

Ora, $\frac{8}{9}$ é uma *fração duas vêzes maior que* $\frac{4}{9}$, pois, enquanto em $\frac{8}{9}$ tomam-se 8 das 9 divisões da unidade, em $\frac{4}{9}$ tomam-se sòmente 4 (fig. 7).

Por essa propriedade as operações efetuadas com o numerador de uma fração refletem *diretamente* no valor da fração, isto é, *aumentando* o valor do numerador, o valor da fração *aumenta* (ou diminuindo o valor do numerador, o valor da fração diminui).

2.ª) *Multiplicando-se* (ou dividindo-se) o *denominador* de uma fração por um certo número, diferente de zero, o *valor* da fração fica *dividido* (ou multiplicado) por êsse número. Exemplo:

Seja a fração $\frac{3}{4}$

Multiplicando o denominador por 2, temos a fração $\frac{3}{8}$.

Ora, $\frac{3}{8}$ é uma *fração duas vêzes menor* que $\frac{3}{4}$, pois, em $\frac{3}{4}$ dividimos a unidade em 4 partes iguais e tomamos 3 e em $\frac{3}{8}$ dividimos a *mesma unidade* em 8 partes iguais e tomamos *também* 3 partes (fig. 8).

Fig. 8

Por essa propriedade as operações efetuadas com o denominador de uma fração refletem *inversamente* no valor da fração isto é, *aumentando* o valor do denominador, o valor da fração *diminui* (ou diminuindo o valor do denominador o valor da fração aumenta).

3.ª) *Multiplicando-se* (ou dividindo-se) *ambos os têrmos* de uma fração por um mesmo número, diferente de zero, o valor da fração *não se altera*. Exemplo:

Seja a fração $\frac{2}{7}$

Multiplicando o numerador e o denominador por 3, temos:

$$\frac{2 \times 3}{7 \times 3} = \frac{6}{21}$$

Essas frações $\frac{2}{7}$ e $\frac{6}{21}$ têm o mesmo valor, pois, quando multiplicamos o numerador da fração $\frac{2}{7}$ por 3, o valor da fração ficou multiplicado por 3 (pela primeira propriedade) e quando multiplicamos o denominador por 3, o valor da fração ficou dividido por 3 (segunda propriedade). Logo, tendo sido o valor da fração multiplicado e dividido por 3, êle *não se alterou*.

As frações de igual valor, como $\frac{2}{7}$ e $\frac{6}{21}$, dizem-se *equivalentes* e podem ser igualadas $\frac{2}{7} = \frac{6}{21}$.

Fonte: Sangiorgi (1955, p. 121-123).

Quintella (1959) descreve as mesmas propriedades que Sangiorgi (1955), utilizando a mesma sequência de apresentação, ou seja, multiplicações (ou divisões) no numerador e no denominador.

A redução de frações ao mínimo múltiplo comum, em que Sangiorgi (1955) sugere três etapas e Quintella (1959) apenas duas, está exposta no Quadro 2 a seguir.

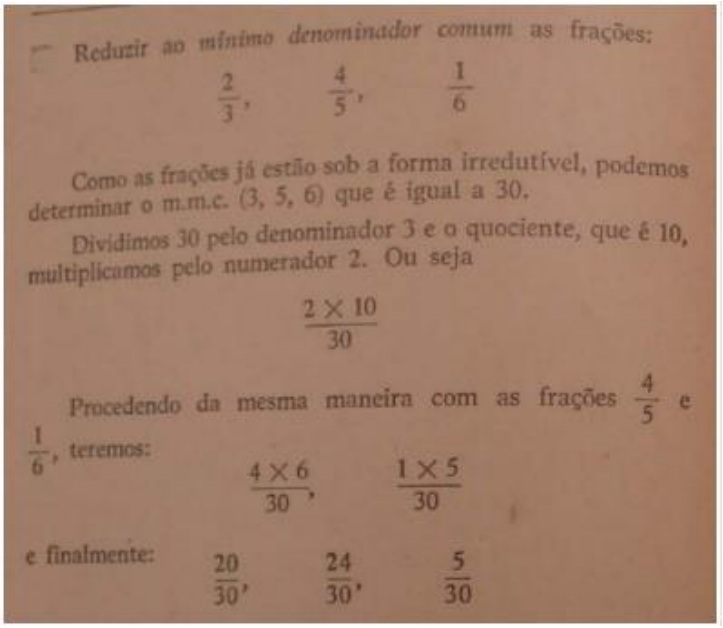
Quadro 2 – Etapas da redução ao mesmo denominador

Sangiorgi (1955)	Quintella (1959)
1. Reduz as frações à forma irredutível	1. Reduzem-se as frações à expressão mais simples
2. Determina-se o m.m.c. dos denominadores dessas frações	2. Multiplicam-se os dois termos de cada uma pelo quociente da divisão do m.m.c. dos denominadores pelo denominador correspondente
3. Multiplica-se cada numerador pelo quociente da divisão do m.m.c. pelo denominador e dá-se para denominador o m.m.c.	

Fonte: Sangiorgi (1955) e Quintella (1959).

Sangiorgi (1955) apresenta um exemplo, seguindo cada uma dessas etapas, das quais obtém frações equivalentes, embora não denomine dessa forma, como observa-se na Figura 4

Figura 4 – Exemplo de utilização das regras para obter frações equivalentes



Reduzir ao *mínimo denominador comum* as frações:

$\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{1}{6}$

Como as frações já estão sob a forma irredutível, podemos determinar o m.m.c. (3, 5, 6) que é igual a 30.

Dividimos 30 pelo denominador 3 e o quociente, que é 10, multiplicamos pelo numerador 2. Ou seja

$$\frac{2 \times 10}{30}$$

Procedendo da mesma maneira com as frações $\frac{4}{5}$ e $\frac{1}{6}$, teremos:

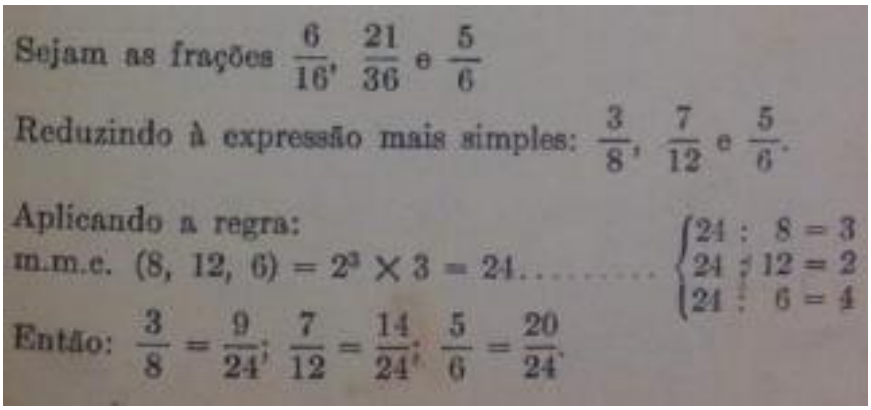
$$\frac{4 \times 6}{30}, \quad \frac{1 \times 5}{30}$$

e finalmente: $\frac{20}{30}$, $\frac{24}{30}$, $\frac{5}{30}$

Fonte: Sangiorgi (1955, p. 104).

As etapas também são expostas por Quintella (1959), dispostas na Figura 5 abaixo.

Figura 5 – Aplicação da regra para obter frações equivalentes



Fonte: Quintella (1959, p. 129).

Assim, a fim de elencar as diferenças por nós destacadas, construímos o Quadro 3 a seguir.

Quadro 3 – Comparação quanto à representação do conteúdo de frações

Sangiorgi (1955)	Quintella (1959)
A representação de unidade é ilustrada por um tablete de chocolate	A representação de unidade é ilustrada por um segmento
Não há correspondente nesta obra	Usa o conceito "parte alíquota" e "unidade fraccionária"
Considera fração como número fracionário	Considera fração como número fracionário e como quociente de dois inteiros
Considera a simplificação de uma fração como a divisão de seus termos por um mesmo número, obtendo uma fração igual à dada	Considera a simplificação de uma fração como a divisão de seus termos por um mesmo número, obtendo uma fração igual à dada
Define frações equivalentes como aquelas de *igual valor* e as obtém reduzindo ao mesmo denominador	Obtém frações equivalentes reduzindo-as a expressões mais simples, e depois ao mesmo denominador

Fonte: As autoras (2024).

Mediante a síntese apresentada no Quadro 3, destacamos que as abordagens diferem minimamente. Ambos os autores tomam como base o estudo das frações fazendo uso de técnicas e apresentando exemplos numéricos de forma introdutória, precedendo conceitos.

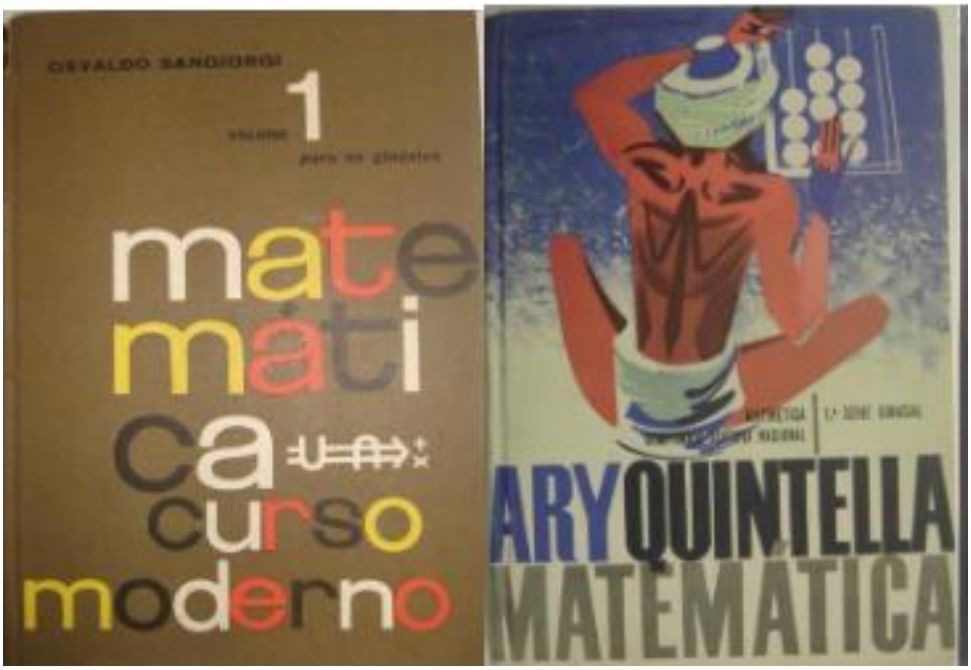
De acordo com Valente (2008a, p. 589), na década de 1950, essa visão mais técnica do conteúdo proporcionava discussões sobre o ensino de matemática, no sentido de se preocupar com "atitudes pedagógicas" que deveriam ser seguidas por professores de matemática, "face ao paralelo das estruturas mentais dos alunos com as da estruturas matemáticas".

Livros publicados *durante* o Movimento da Matemática Moderna no Brasil

Nesta seção, apresentamos obras dos mesmos autores já mencionados na seção anterior, Ary Quintella e Osvaldo Sangiorgi, pois publicaram livros de Matemática durante o MMM no Brasil, na década de 1960.

Analisaremos os livros *Matemática 1: Curso Moderno*, volume 1 para os ginásios, 5ª edição, produzido pela Editora Nacional em 1966, de Osvaldo Sangiorgi (Figura 6); *Matemática para a Primeira Série Ginasial,* 121ª edição, produzido pela mesma editora no ano de 1966, de Ary Quintella (Figura 6). Assim como aconteceu com os livros anteriores, não conseguimos precisar o número exato de páginas dessas duas obras, devido às inconsistências nos materiais digitalizados.

Figura 6 – Capa dos livros



Fonte: Sangiorgi (1966) e Quintella (1966).

Inicialmente, a apresentação da capa já se mostra diferente das publicações no período que precede o MMM. Visualizamos uma cartela de cores mais chamativas, com letras maiores e sem as representações geométricas de outrora. Segundo Santos (2015), algumas alterações se fizeram presentes, como o uso de ilustrações como recurso textual e visual e a variação na paleta de cores internas. Miorim (2005, p. 7) corrobora alegando que "[...] essas mudanças dizem respeito às dimensões dos livros, às características de sua encadernação, à qualidade de impressão, à incorporação gradativa de uso de cores, ao uso de recursos visuais e a uma melhor distribuição do espaço".

Valente (2008a, p. 606) explica que há uma "nova diagramação na apresentação dos conteúdos escolares, no uso de tipos de letras e números de diferentes tamanhos

e formas; inclusão de cores nas páginas internas, fotografias, desenhos", e que padrões visuais dos livros de matemática dos anos 50 são progressivamente substituídos por uma nova abordagem e estilo.

Na obra de Sangiorgi de 1966, comparado à publicação de 1955, evidenciamos no "índice" mudança na diagramação, na escolha e na apresentação dos conteúdos. O índice da obra de Sangiorgi (1966) também difere das obras de Quintella (1955 e 1966), que manteve os conteúdos de um livro para outro. A seguir, no Quadro 4, elencamos os conteúdos descritos nas obras destacadas nesta subseção:

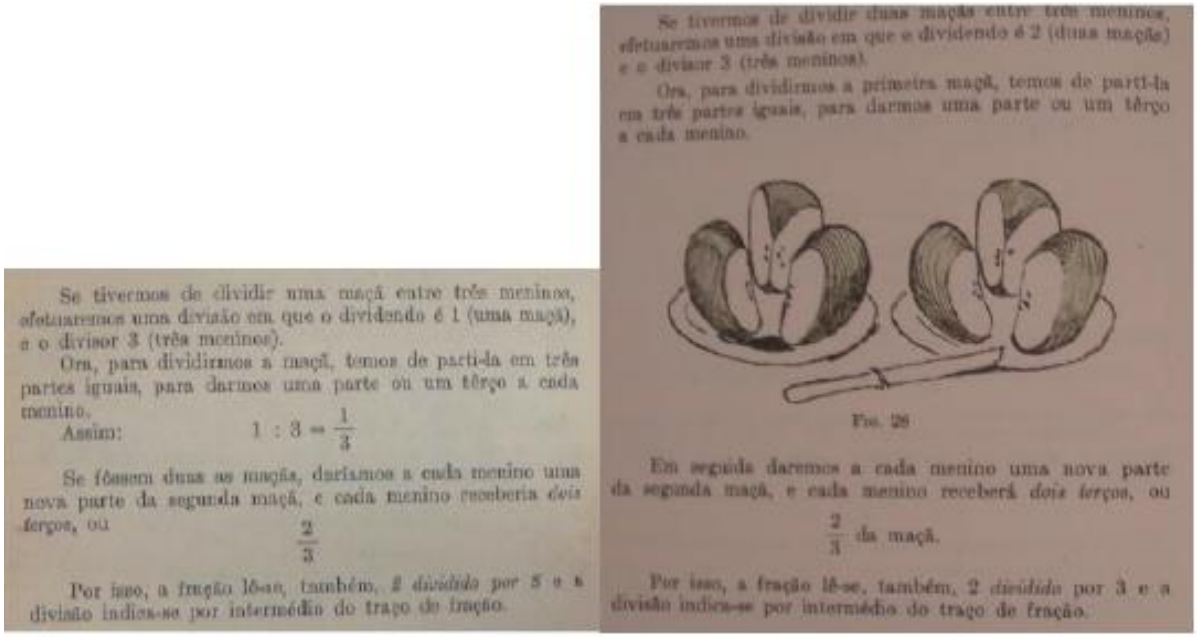
Quadro 4 – Descrição dos índices das obras de Sangiorgi (1966) e Quintella (1966)

Sangiorgi (1966)	Quintella (1966)
1. Número de numeral – sistema de numeração - bases	1. Números inteiros
2. Operações com números inteiros – propriedades estruturais	2. Divisibilidade; números primos
3. Divisibilidade – múltiplos e divisores; números primos; fatoração completa	3. Números fracionários
4. Números fracionários – operações, propriedades estruturais	4. Sistema métrico
5. Estudo das principais figuras geométricas planas e espaciais	
6. Sistema de medidas; sistema decimal; e sistemas não decimais	

Fonte: As autoras (2024).

Mesmo que Quintella (1966) não atribua uma unidade para o estudo sobre conjuntos, o autor apresenta esse conteúdo quando explana sobre os números inteiros, primeiro assunto abordado na obra. Como na edição anterior que analisamos, o autor relaciona a fração à medida de uma grandeza e ao quociente de uma divisão; além disso, destaca-se o recurso ilustrativo utilizado pelo autor (Figura 7).

Figura 7 – Comparação dos livros de Quintella



Se tivermos de dividir uma maçã entre três meninos, efetuaremos uma divisão em que o dividendo é 1 (uma maçã), e o divisor 3 (três meninos).

Ora, para dividirmos a maçã, temos de parti-la em três partes iguais, para darmos uma parte ou um têrço a cada menino.

Assim: $1 : 3 = \frac{1}{3}$

Se fôssem duas as maçãs, dariamos a cada menino uma nova parte da segunda maçã, e cada menino receberia *dois têrços*, ou $\frac{2}{3}$

Por isso, a fração lê-se, também, *2 dividido por 3* e a divisão indica-se por intermédio do traço de fração.

Se tivermos de dividir duas maçãs entre três meninos, efetuaremos uma divisão em que o dividendo é 2 (duas maçãs) e o divisor 3 (três meninos).

Ora, para dividirmos a primeira maçã, temos de parti-la em três partes iguais, para darmos uma parte ou um têrço a cada menino.

Fig. 28

Em seguida daremos a cada menino uma nova parte da segunda maçã, e cada menino receberá *dois têrços*, ou $\frac{2}{3}$ da maçã.

Por isso, a fração lê-se, também, 2 *dividido* por 3 e a divisão indica-se por intermédio do traço de fração.

Fonte: Quintella (1955, p. 120) e Quintella (1966, p. 156), respectivamente.

Para introduzir as ideias iniciais, como fez no livro anterior (1955), Sangiorgi (1966) utiliza barras de chocolate e Quintella (1966) a torta de maçã. Outro aspecto já mencionado e que evidenciamos são as diferenças visuais nas abordagens, com destaque para o uso de ilustrações coloridas e com elementos conhecidos no cotidiano, como podemos observar na Figura 7 (Quintella, 1955; Quintella, 1966) e na Figura 8 (Sangiorgi, 1966; Quintella, 1966), em que se apresenta a ideia de número fracionário.

Figura 8 – Ideia de número fracionário

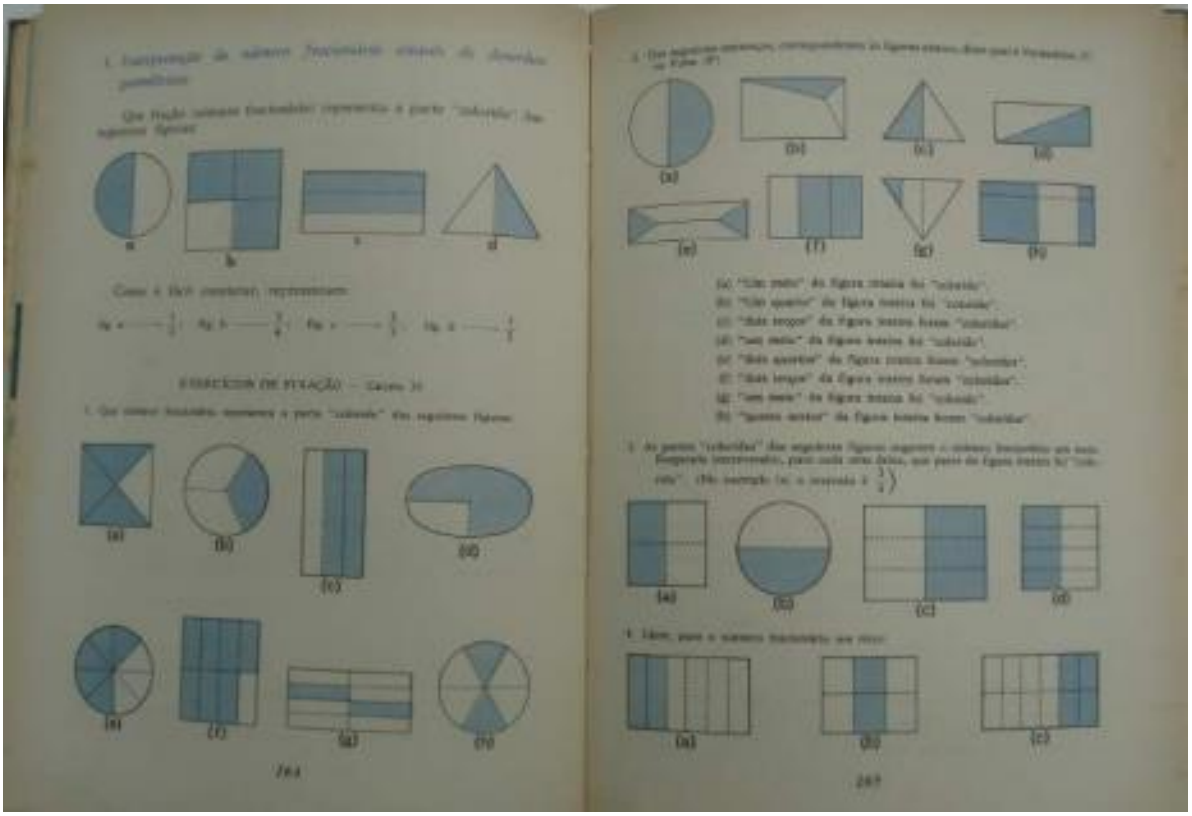


Fonte: Sangiorgi (1966) e Quintella (1966), respectivamente.

Para Sangiorgi (1966, p. 162), unidade fracionária representa cada uma das partes obtidas pela divisão da unidade em partes iguais. Assim, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{5}$ são exemplos de unidades fracionárias, pois correspondem à unidade dividida em 4, 2 ou 5 partes iguais, respectivamente. Mesmo não definindo, Quintella apresenta uma explicação para o número fracionário: "quando um todo ou uma unidade é dividida em partes

iguais, uma dessas partes ou a união de várias formam uma fração do todo" (Quintella, 1966, p. 153).

Figura 9 – Representação do número fracionário em Sangiorgi (1966)

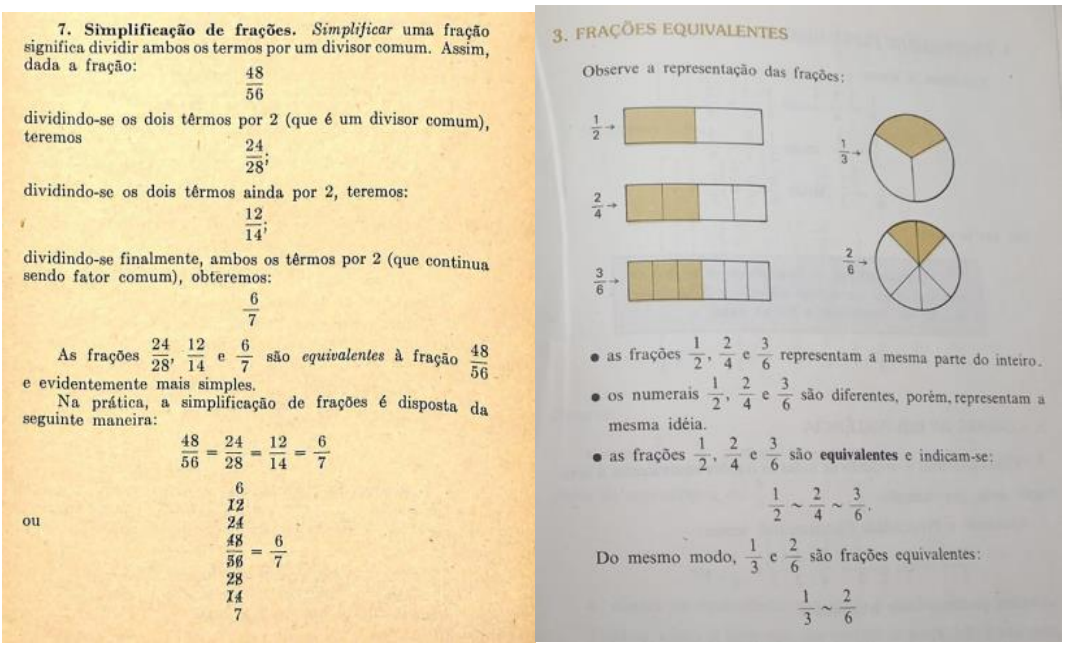


Fonte: Sangiorgi (1966, p. 164-165).

Para os autores, a fração também pode ser representada graficamente, sendo composta por dois números inteiros (numerador e denominador), chamados *termos da fração*, separados por uma barra horizontal (Sangiorgi, 1966, p. 161) ou inclinada (Quintella, 1966, p. 154), por exemplo: $\frac{7}{9}$ ou 7/9. Esta "distinção" entre *fração* e *número fracionário* não é feita por Quintella; por exemplo, ao abordar o assunto como "frações ordinárias", sempre se refere diretamente às frações, não utilizando o termo *número fracionário*, como o faz Sangiorgi, como exemplificado na Figura 9. Quintella (1966, p. 156) relaciona a fração à medida de uma grandeza e ao quociente de uma divisão, o que parece associar a fração à ideia de número.

Sobre frações equivalentes, Quintella (1966) explicita por meio de ilustrações e apresenta exemplos numéricos resolvidos. Já Sangiorgi (1966) as obtém mediante explicação sobre simplificações, apresentando na sequência um exemplo numérico resolvido. Não apresenta representações geométricas, ressaltando apenas a regra "multiplicando-se (ou dividindo-se) os dois termos de uma fração por um mesmo número natural, obtém-se uma fração equivalente à dada" (Sangiorgi, 1966, p. 176). Veja a Figura 10 a seguir:

Figura 10 – Frações equivalentes



7. Simplificação de frações. *Simplificar* uma fração significa dividir ambos os termos por um divisor comum. Assim, dada a fração:

$$\frac{48}{56}$$

dividindo-se os dois têrmos por 2 (que é um divisor comum), teremos

$$\frac{24}{28};$$

dividindo-se os dois têrmos ainda por 2, teremos:

$$\frac{12}{14};$$

dividindo-se finalmente, ambos os têrmos por 2 (que continua sendo fator comum), obteremos:

$$\frac{6}{7}$$

As frações $\frac{24}{28}$, $\frac{12}{14}$ e $\frac{6}{7}$ são *equivalentes* à fração $\frac{48}{56}$ e evidentemente mais simples.

Na prática, a simplificação de frações é disposta da seguinte maneira:

$$\frac{48}{56} = \frac{24}{28} = \frac{12}{14} = \frac{6}{7}$$

ou

$$\begin{array}{r} 6 \\ 12 \\ 24 \\ 48 \\ \overline{56} \\ 28 \\ 14 \\ 7 \end{array} \quad = \frac{6}{7}$$

3. FRAÇÕES EQUIVALENTES

Observe a representação das frações:

$\frac{1}{2}\rightarrow$ $\frac{2}{4}\rightarrow$ $\frac{3}{6}\rightarrow$ $\frac{1}{3}\rightarrow$ $\frac{2}{6}\rightarrow$

- as frações $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$ e $\frac{3}{6}$ representam a mesma parte do inteiro.
- os numerais $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$ e $\frac{3}{6}$ são diferentes, porém, representam a mesma idéia.
- as frações $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$ e $\frac{3}{6}$ são **equivalentes** e indicam-se:

$$\frac{1}{2} \sim \frac{2}{4} \sim \frac{3}{6}.$$

Do mesmo modo, $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{6}$ são frações equivalentes:

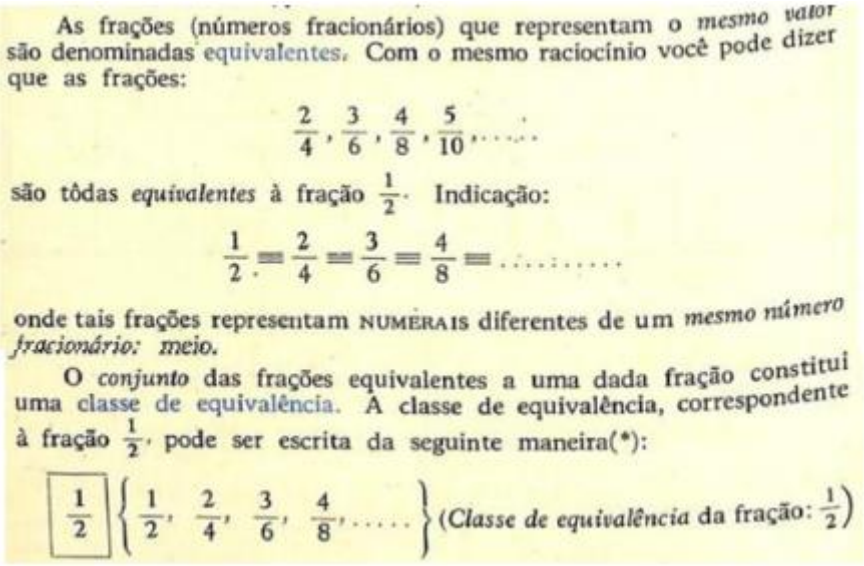
$$\frac{1}{3} \sim \frac{2}{6}$$

Fonte: Sangiorgi (1966, p. 123) e Quintella (1966, p. 135), respectivamente.

Sangiorgi (1966) define que frações equivalentes e frações iguais são conceitos distintos, pois a equivalência é válida quando as frações representam o mesmo valor e somente serão consideradas iguais quando possuírem os mesmos valores para numeradores e denominadores.

Nesse livro, Sangiorgi (1966) faz a inclusão das classes de equivalência entre frações. Estas são apresentadas como um subconjunto das frações equivalentes (Figura 11).

Figura 11 – Definição de frações equivalentes



As frações (números fracionários) que representam o *mesmo valor* são denominadas equivalentes. Com o mesmo raciocínio você pode dizer que as frações:

$$\frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \frac{5}{10}, \ldots\ldots$$

são tôdas *equivalentes* à fração $\frac{1}{2}$. Indicação:

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \ldots\ldots\ldots$$

onde tais frações representam NUMERAIS diferentes de um *mesmo número fracionário: meio.*

O *conjunto* das frações equivalentes a uma dada fração constitui uma classe de equivalência. A classe de equivalência, correspondente à fração $\frac{1}{2}$, pode ser escrita da seguinte maneira(*):

$$\boxed{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \ldots\ldots \right\} \text{(Classe de equivalência da fração: } \frac{1}{2})$$

Fonte: Sangiorgi (1966, p. 174).

Quintella (1966, p. 161) considera equivalentes frações de mesmo valor, isto é, $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$, não menciona a igualdade de frações e não explana sobre classes de equivalência. A fim de descrever as diferenças percebidas, construímos o Quadro 5.

Quadro 5 – Síntese das diferenças nas representações do conteúdo de frações

Sangiorgi (1966)	Quintella (1966)
A representação de unidade fracionária é ilustrada por um pedação de uma barra de chocolate	A representação de unidade fracionária é ilustrada por um pedaço de uma torta de maçã
Apresenta a descrição de fração como número fracionário; Início do conceito de números racionais	Apresenta a descrição de fração como medida de uma grandeza ou quociente de uma divisão
Apresenta classes de equivalência como um subconjunto das frações equivalentes	Não aborda classes de equivalência
Apresenta ilustrações geométricas para representar números fracionários, mas não para frações equivalentes	Apresenta frações equivalentes por meio de ilustrações

Fonte: As autoras (2024).

Assim, percebemos nas obras que os conteúdos se mantêm, apresentando algumas alterações em comparação ao período anterior, principalmente na descrição e na abordagem dos conteúdos, contendo mais diagramações e figuras. No que se diz respeito às alterações, as últimas obras analisadas representam as frações por meio de figuras, e nos livros anteriores não utilizavam esse meio de representação. Cabe ressaltar também que Sangiorgi desenvolve as frações equivalentes apenas por meio da simplificação, abstendo-se da representação geométrica; além disso, apresenta as classes de equivalência como um conjunto das frações equivalentes.

Livros *após* o Movimento da Matemática Moderna no Brasil

Seguindo nosso percurso histórico, analisaremos, na década de 1990, os livros: *Matemática Atual*, de Antônio José Lopes Bigode, publicado pela editora Atual em 1994, e *A Conquista da Matemática*, dos autores José Ruy Giovanni, Benedito Castrucci e José Ruy Giovanni Jr, publicado pela editora FTD em 1998, cujas capas estão dispostas na Figura 12.

Comparadas às obras anteriores, percebemos uma mudança visual na abordagem e na cartela de cores das capas de ambas. Tanto a parte externa como a interna são coloridas, mostrando elementos que podem ser facilmente visualizados e que fazem parte do cotidiano.

Figura 12 – Capa dos livros



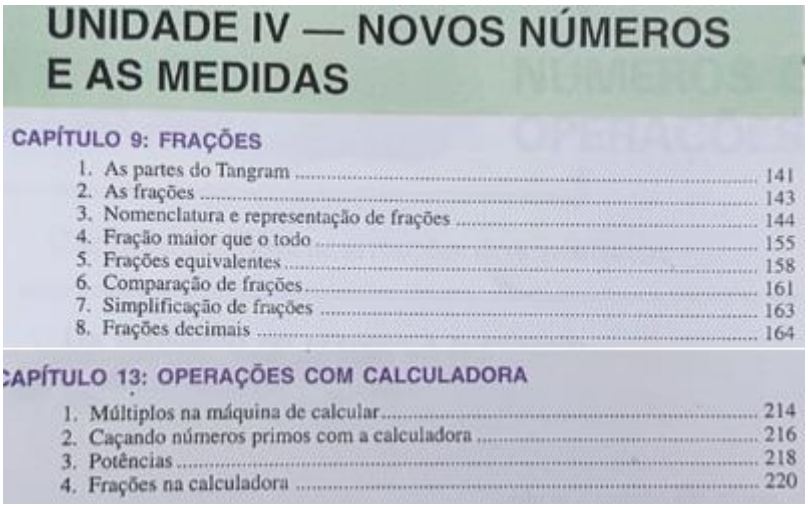
Fonte: Bigode (1994) e Giovanni et al. (1998).

Bigode (1994) concentra o conteúdo de frações na unidade IV nominada de *Novos Números e as Medidas*. Dentro desta unidade, tem-se dois capítulos: *Frações* e *Operações com Calculadora*, em que apresenta as operações com frações com o auxílio da calculadora. O livro contém 220 páginas, distribuídas em quatro unidades e treze capítulos, finalizando com 16 páginas do "manual do professor".

No "manual do professor", há a apresentação dos pressupostos teóricos da coleção, a determinação das características do projeto didático, informações sobre a gestão da sala de aula, do uso do livro e do caderno, além de abordar a lição de casa, as atividades em grupo, o laboratório, os projetos, o estudo do meio, os temas transversais, os recursos didáticos, as calculadoras e a avaliação.

A unidade IV (Figura 13) aborda frações, números decimais, porcentagens, sistema de medidas e operações com calculadora, mostrando como utilizar a calculadora para encontrar números primos, potências e frações. Ao final da abordagem de cada conceito, apresenta algumas atividades com exercícios de fixação/repetição e exercícios contextualizados.

Figura 13 – Unidade IV no índice da obra



UNIDADE IV — NOVOS NÚMEROS E AS MEDIDAS

CAPÍTULO 9: FRAÇÕES

1. As partes do Tangram 141
2. As frações 143
3. Nomenclatura e representação de frações 144
4. Fração maior que o todo 155
5. Frações equivalentes 158
6. Comparação de frações 161
7. Simplificação de frações 163
8. Frações decimais 164

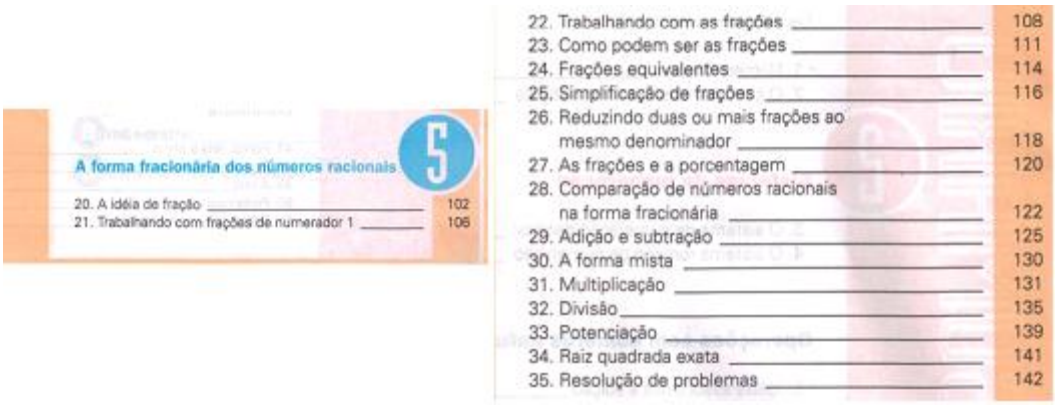
CAPÍTULO 13: OPERAÇÕES COM CALCULADORA

1. Múltiplos na máquina de calcular 214
2. Caçando números primos com a calculadora 216
3. Potências 218
4. Frações na calculadora 220

Fonte: Bigode (1994).

Já nas primeiras páginas da obra *A Conquista da Matemática*, o leitor encontra um curto texto de apresentação, cujo conteúdo busca enfatizar que o teor abstrato da disciplina poderá causar algum desapontamento. Giovanni et al. (1998) concentram o conteúdo de frações na unidade 5 (Figura 14), intitulada *A forma fracionária dos números racionais*. O capítulo se inicia na página 102 e finda na página 142, dividido em 16 subitens.

Figura 14 – Índice – unidade 5



5 A forma fracionária dos números racionais

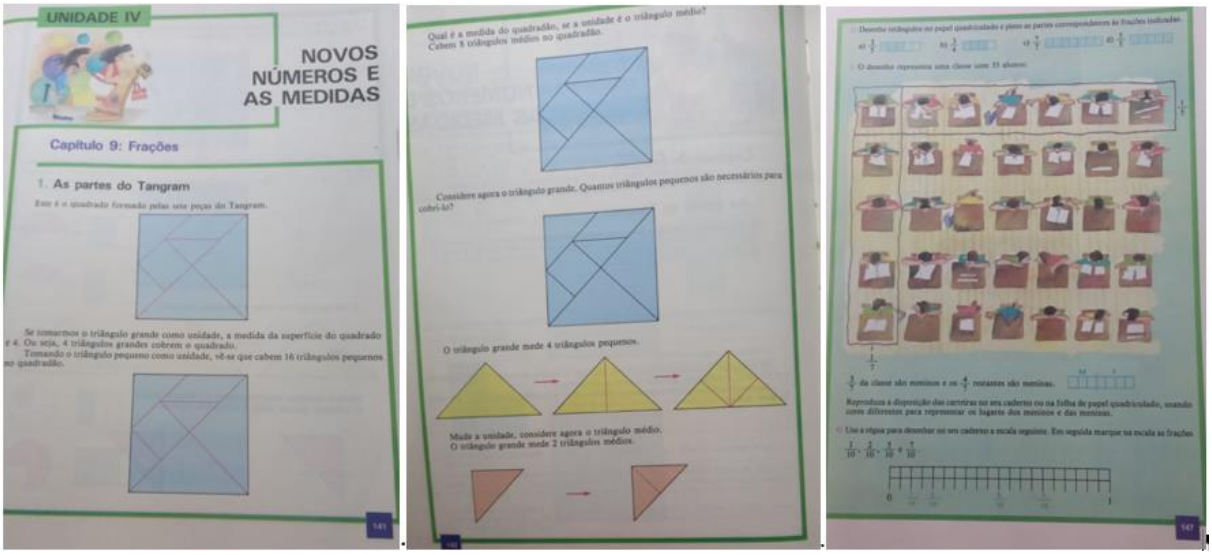
20. A idéia de fração 102
21. Trabalhando com frações de numerador 1 106
22. Trabalhando com as frações 108
23. Como podem ser as frações 111
24. Frações equivalentes 114
25. Simplificação de frações 116
26. Reduzindo duas ou mais frações ao mesmo denominador 118
27. As frações e a porcentagem 120
28. Comparação de números racionais na forma fracionária 122
29. Adição e subtração 125
30. A forma mista 130
31. Multiplicação 131
32. Divisão 135
33. Potenciação 139
34. Raiz quadrada exata 141
35. Resolução de problemas 142

Fonte: Giovanni et al. (1998).

No final da obra, está o "manual do professor", em que há a apresentação das preocupações dos autores em como a obra será avaliada pelos professores, além de questionamentos como: "[...] será que estamos fornecendo a nossos alunos situações desafiadoras? [...] os jogos são situações-problema? Desenvolvem o raciocínio e a habilidade de cálculo mental?" (p. 1). O manual explora outros aspectos, como objetivos específicos, orientações metodológicas e as chamadas situações enriquecedoras, as quais abordam problemas envolvendo curiosidades para cada unidade.

Quanto ao conteúdo introdutório de frações, cada obra faz uso de abordagens distintas. Bigode introduz por meio do tangram e de várias situações de aplicações no dia a dia (Figura 15), tais como "O desenho representa a classe com 35 alunos, 3/7 da classe são meninos e os 4/7 restantes são meninas" (Bigode, 1994, p. 147).

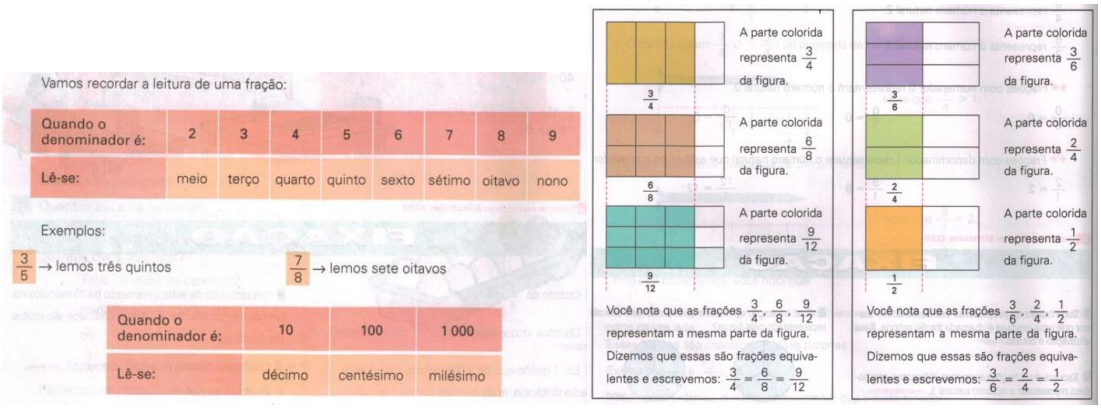
Figura 15 – Introdução ao conteúdo de frações



Fonte: Bigode (1994, p. 141-142; 147).

Na obra de Giovanni et al. (1998), percebe-se a presença de contextualizações e o uso de informações históricas sobre o conteúdo. Outrossim, há uma preocupação com o rigor, com a escrita e a forma correta de leitura das frações (Figura 16), seja na representação geométrica, seja na representação por desenhos.

Figura 16 – Leitura de frações e representação geométrica



Fonte: Giovanni et al. (1998, p. 108; 114).

Visualmente, as obras são coloridas (Figura 16) com tons marcantes e chamativos, fazem uso da história da matemática (Figura 17) como meio de contextualização e ambientação do conceito.

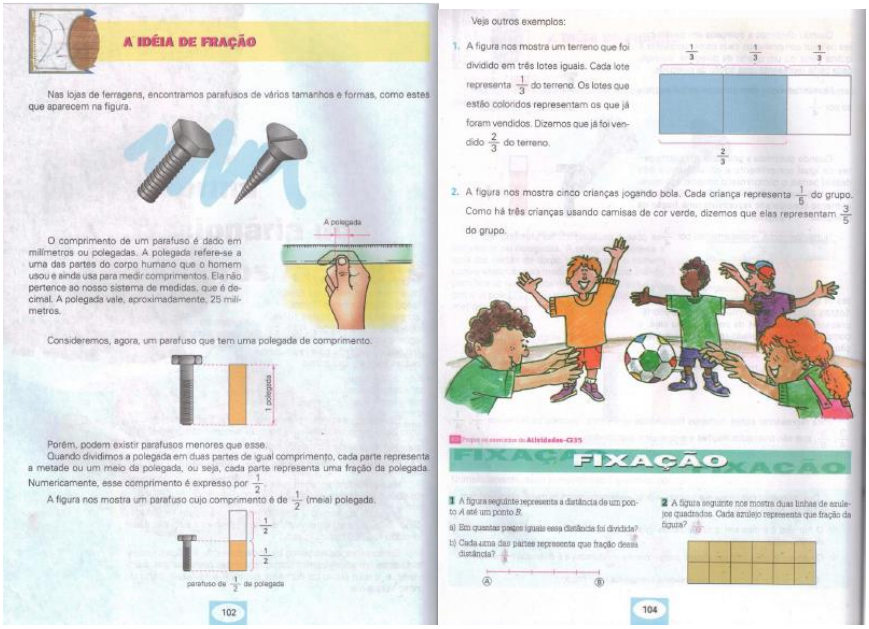
Figura 17 – Contextualização histórica, uso de cores chamativas e exemplo de exercícios



Fonte: Giovanni et al. (1998, p. 100-101).

A ideia introdutória de fração apresentada por Giovanni et al. (1998) utiliza elementos conhecidos e de fácil acesso, como parafusos. O conteúdo é exposto de forma detalhada, chamando atenção do estudante para os conceitos, listando possibilidades de resoluções, ou seja, situações resolvidas sempre antes das listas de exercícios, intituladas "fixação". As atividades e os exemplos fazem uso de ações do cotidiano, como jogar bola (Figura 18).

Figura 18 – Ideia de frações; Atividades contextualizadas e fixação

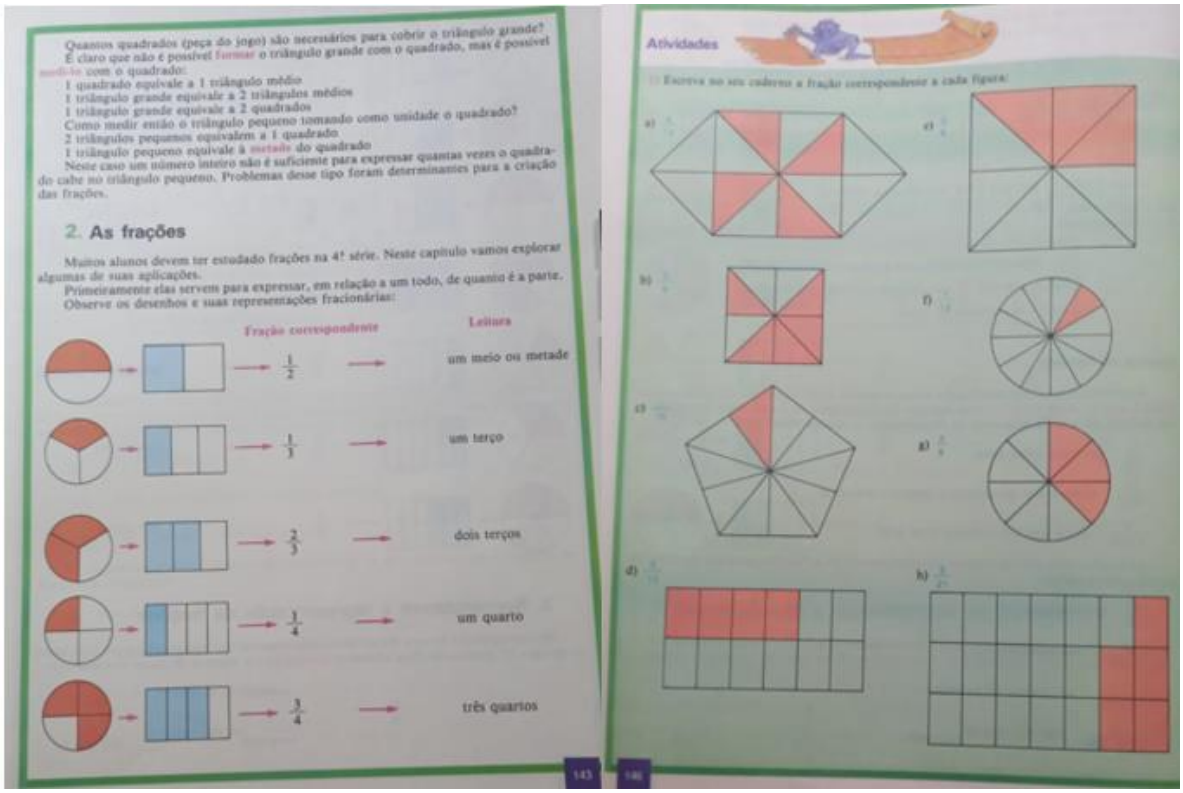


Fonte: Giovanni et al. (1998, p. 102; 104).

Bigode (1994) explora em seus capítulos uma apresentação de cunho mais descritivo, fazendo uso de exemplificações com uma bibliografia diversificada; por exemplo, na representação de frações, "segundo Malba Tahan, autor do clássico *O homem que calculava*, as formas $\frac{a}{b}$ e a/b para indicar frações, ou a divisão de a por b, são atribuídas aos árabes" (Bigode, 1994, p. 145).

A Figura 19 expressa imagens que apresentam a ideia introdutória de frações utilizando a representação geométrica e exercícios/atividades propostas.

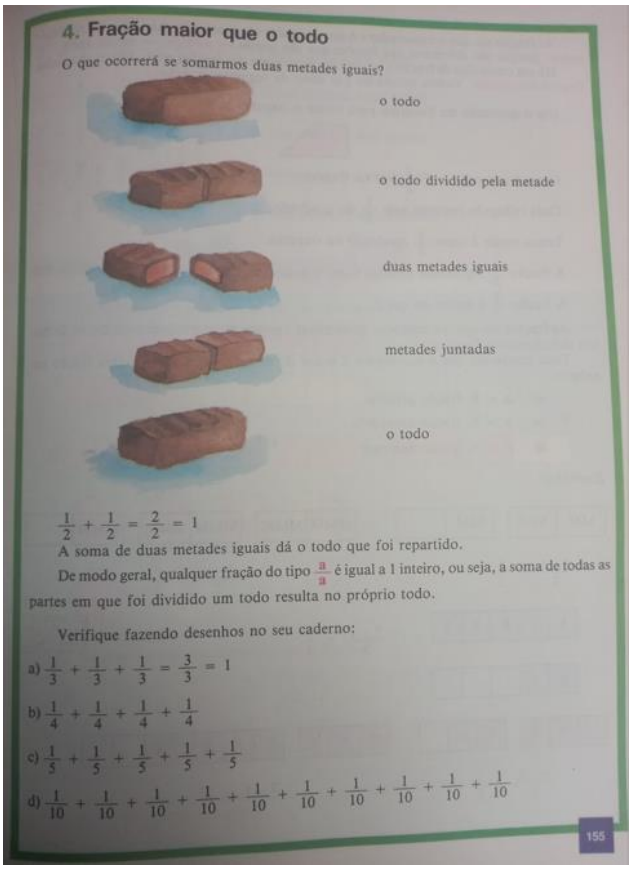
Figura 19 – Representação geométrica e atividades



Fonte: Bigode (1994, p. 143; 146).

Da mesma forma que nas edições anteriormente analisadas, faz-se uso de objetos/alimentos de conhecimento comum, isto é, a representação da fração como parte/todo, sendo a exemplificação representada por chocolate (Figura 20).

Figura 20 – Representação parte/todo



4. Fração maior que o todo

O que ocorrerá se somarmos duas metades iguais?

o todo

o todo dividido pela metade

duas metades iguais

metades juntadas

o todo

$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{2}{2} = 1$

A soma de duas metades iguais dá o todo que foi repartido.

De modo geral, qualquer fração do tipo $\frac{a}{a}$ é igual a 1 inteiro, ou seja, a soma de todas as partes em que foi dividido um todo resulta no próprio todo.

Verifique fazendo desenhos no seu caderno:

a) $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{3}{3} = 1$

b) $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$

c) $\frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5}$

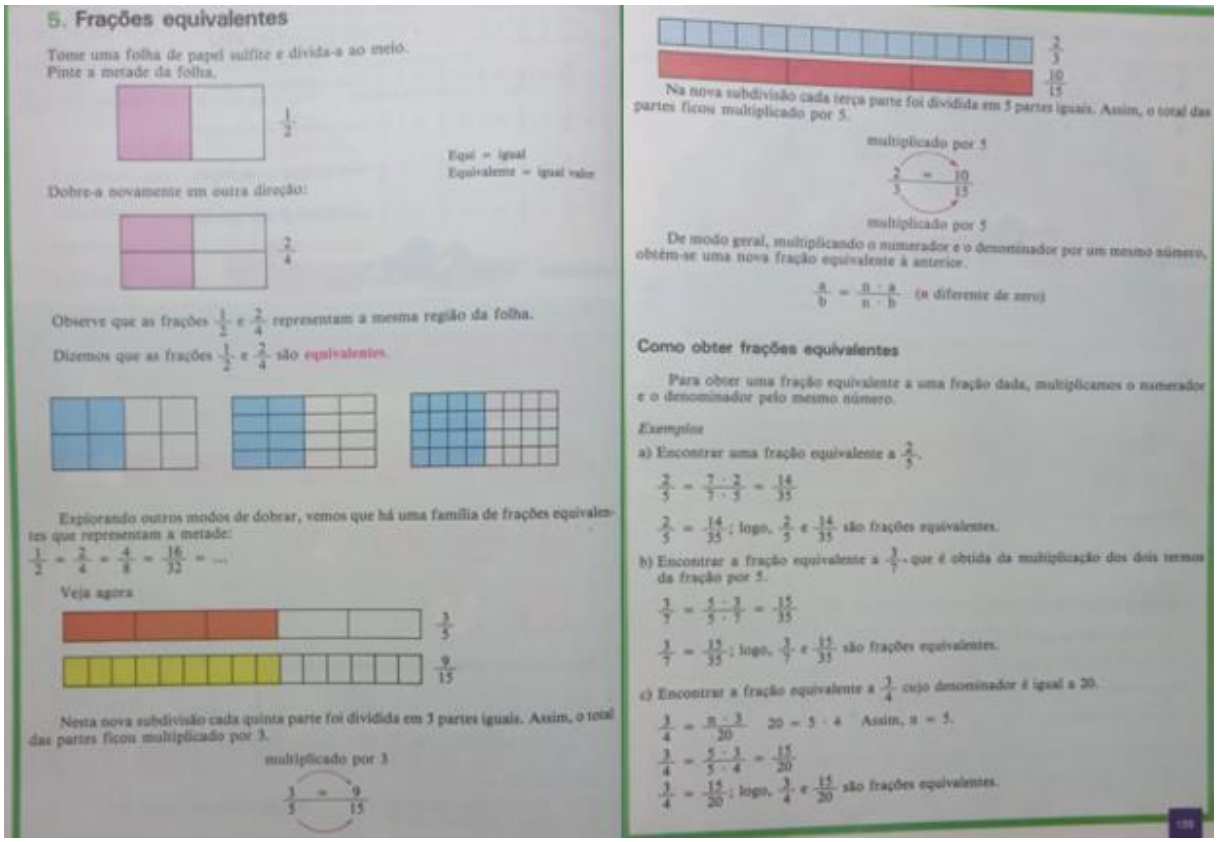
d) $\frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10}$

155

Fonte: Bigode (1994, p. 155).

O significado de frações está expresso por exemplos, em desenhos coloridos. Há a representação de parte/todo e a localização na reta dos números fracionários. Além disso, no final da página, há a lista de atividades para reproduzir a ideia introduzida. Quanto às frações equivalentes (Figura 21), por mais que a paleta de cores e a diagramação esteja mais diversificada e colorida, os recursos matemáticos para a explanação do conteúdo são semelhantes quando comparados com os livros de Sangiorgi (1966) e Quintella (1966).

Figura 21 – Frações equivalentes



5. Frações equivalentes

Tome uma folha de papel sulfite e divida-a ao meio.
Pinte a metade da folha.

$\frac{1}{2}$

Equi = igual
Equivalente = igual valor

Dobre-a novamente em outra direção:

$\frac{2}{4}$

Observe que as frações $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{4}$ representam a mesma região da folha.

Dizemos que as frações $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{4}$ são equivalentes.

Explorando outros modos de dobrar, vemos que há uma família de frações equivalentes que representam a metade:

$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8} = \frac{16}{32} = \ldots$

Veja agora

$\frac{3}{5}$

$\frac{9}{15}$

Nesta nova subdivisão cada quinta parte foi dividida em 3 partes iguais. Assim, o total das partes ficou multiplicado por 3.

multiplicado por 3

$\frac{3}{5} = \frac{9}{15}$

$\frac{2}{3}$

$\frac{10}{15}$

Na nova subdivisão cada terça parte foi dividida em 5 partes iguais. Assim, o total das partes ficou multiplicado por 5.

multiplicado por 5

$\frac{2}{3} = \frac{10}{15}$

multiplicado por 5

De modo geral, multiplicando o numerador e o denominador por um mesmo número, obtém-se uma nova fração equivalente à anterior.

$\frac{a}{b} = \frac{n \cdot a}{n \cdot b}$ (n diferente de zero)

Como obter frações equivalentes

Para obter uma fração equivalente a uma fração dada, multiplicamos o numerador e o denominador pelo mesmo número.

Exemplos

a) Encontrar uma fração equivalente a $\frac{2}{5}$.

$\frac{2}{5} = \frac{7 \cdot 2}{7 \cdot 5} = \frac{14}{35}$

$\frac{2}{5} = \frac{14}{35}$; logo, $\frac{2}{5}$ e $\frac{14}{35}$ são frações equivalentes.

b) Encontrar a fração equivalente a $\frac{3}{7}$, que é obtida da multiplicação dos dois termos da fração por 5.

$\frac{3}{7} = \frac{5 \cdot 3}{5 \cdot 7} = \frac{15}{35}$

$\frac{3}{7} = \frac{15}{35}$; logo, $\frac{3}{7}$ e $\frac{15}{35}$ são frações equivalentes.

c) Encontrar a fração equivalente a $\frac{3}{4}$ cujo denominador é igual a 20.

$\frac{3}{4} = \frac{n \cdot 3}{20}$ $20 = 5 \cdot 4$ Assim, $n = 5$.

$\frac{3}{4} = \frac{5 \cdot 3}{5 \cdot 4} = \frac{15}{20}$

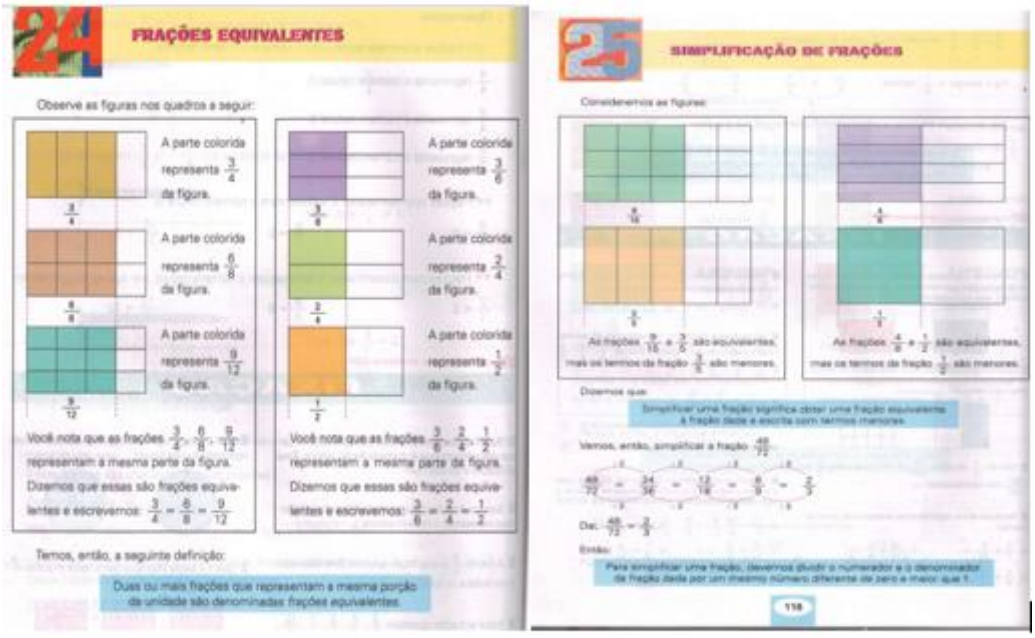
$\frac{3}{4} = \frac{15}{20}$; logo, $\frac{3}{4}$ e $\frac{15}{20}$ são frações equivalentes.

Fonte: Bigode (1994, p. 158 e 159).

Para o caso de obter essas frações equivalentes, faz uso das mesmas ideias já vistas nos livros da década de 60, em que Sangiorgi (1966) utiliza a simplificação e Quintella (1966) a explicita também com as representações geométricas. Observa-se que Bigode (1994) aborda frações equivalentes com representação geométrica e trata da ideia de multiplicação para obtê-las.

Os autores Giovanni et al. (1998), assim como Bigode (1994), apresentam as frações equivalentes antes de introduzir a simplificação e mantêm o formato das representações geométricas, fazendo alusão ao significado de fração como parte/todo (Figura 22):

Figura 22 – As frações equivalentes antes da simplificação de frações



Fonte: Giovanni et al. (1998, p. 114; 116).

A fim de explicitar as diferenças e similaridades, sintetizamos no Quadro 6:

Quadro 6 – Representação do conteúdo de frações

Bigode (1994)	Giovanni et al. (1998)
Representação numérica e geométrica das frações	Rigor com escrita e representação geométrica de frações
Introduz o conteúdo com o tangram e com elementos do dia a dia	Contextualização histórica dos conteúdos e apresentação dos elementos do cotidiano
Utiliza objetos de medição	Utilizam objetos de medição
Exercícios ao final de cada capítulo	Atividades de fixação com elementos do dia a dia, dispostos entre os conteúdos
Aborda frações equivalentes com representação geométrica e utiliza a ideia de multiplicação para obtê-las	Apresentam as frações equivalentes com representações geométricas em um tópico separado, antes de introduzir a simplificação

Fonte: As autoras (2024).

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os livros didáticos, de acordo com Valente (2008), têm um lugar de destaque no registro escrito da história da matemática escolar no nosso país, reforçando a potencialidade desta fonte de pesquisa. Com o passar das décadas, mudanças foram gradualmente implantadas nos livros, abrangendo desde os aspectos mais visuais até as representações escritas, incluindo alterações nas abordagens apresentadas. De

acordo com Fiorentini (2009, p. 21), ações como "representar por imagem, fazer comparações entre a representação imaginada e o objeto de sua ação real" compõem o chamado "construtivismo interacionista".

Especificamente, no conteúdo de frações, nas duas primeiras obras analisadas, o uso de ilustrações ainda era escasso, sendo adotada a estratégia introdutória de apresentação sequencial de regras, seguida de poucos exemplos e exercícios, com pequenas variações nessa ordem e, em pouquíssimos casos, utilização de problemas como introdução do conteúdo a ser abordado, como o exemplo da maçã no livro de Quintella (1959). Nas obras da década de 1960, já aparecem o uso de ilustrações como recurso textual e visual e o aumento do número de cores internas, de exercícios e exemplos. Nas obras de Sangiorgi (1955; 1966), a alteração de maior significado foi a inclusão das classes de equivalência entre frações, como uma seção do capítulo destinada aos números fracionários. As mudanças nas obras de Quintella (1959; 1966) foram ligeiramente tímidas quando comparados às obras de Sangiorgi.

Nos livros didáticos posteriores ao MMM, de Bigode (1994) e Giovanni et al. (1998), há uma abordagem contextualizada, conexas ao cotidiano e a um ensino vinculado às demais áreas do conhecimento, por exemplo, o uso da história para explicar conceitos. No que tange especificamente às frações equivalentes, os livros anteriores ao MMM (Sangiorgi, 1955; Quintella, 1959) as tratavam com ênfase técnica, apresentando regras fixas de simplificação e redução ao mesmo denominador. Durante o MMM, as mudanças visuais nos livros foram acompanhadas por um maior esforço em tornar o conteúdo mais compreensível e próximo do cotidiano. A obra de Sangiorgi (1966) introduziu o conceito de classes de equivalência de frações, alinhando-se à proposta do MMM de incorporar estruturas matemáticas mais formais ao ensino básico, inspiradas na teoria dos conjuntos e na linguagem da matemática moderna. Por outro lado, Quintella (1966), mesmo apresentando o conteúdo com ilustrações, não adotou essa formalização. Nas obras publicadas após o MMM (Bigode, 1994; Giovanni et al., 1998), as frações equivalentes continuam a ser apresentadas com base nas ideias de multiplicação e simplificação. No entanto, essas operações são frequentemente precedidas por representações geométricas, contextualizações históricas e situações do cotidiano. Um exemplo é a apresentação das frações equivalentes antes mesmo da introdução da simplificação, como ocorre na obra de Giovanni et al. (1998).

Em síntese, percebe-se que as abordagens das noções introdutórias das frações e das frações equivalentes nos livros analisados refletem as mudanças curriculares que ocorreram ou vigoravam no período em que os livros foram publicados. Como exemplo, tem-se as regras para cálculo do m.m.c. nos livros anteriores ao MMM, a abordagem das frações por classe de equivalência no período do MMM e uma abordagem mais intuitiva e contextualizada nos livros do último período.

REFERÊNCIAS

Alves, A. M. M. (2005). *Livro didático de matemática: Uma abordagem histórica (1943–1995)* [Dissertação de mestrado, Universidade Federal de Pelotas].

Alves, A. M. M. (2020). *O Movimento da Matemática Moderna no Brasil: Uma análise no livro didático "Matemática Curso Moderno"* [Trabalho de conclusão de curso, Universidade Federal de Santa Catarina].

Bigode, A. L. (1994). *Matemática atual*. Atual.

Búrigo, E. Z. (1989). *Movimento da matemática moderna no Brasil: Estudo da ação e do pensamento de educadores matemáticos nos anos 60* [Dissertação de mestrado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul]. https://lume.ufrgs.br/handle/10183/5237 (Lume UFRGS)

Búrigo, E. Z. (2006). O movimento da matemática moderna no Brasil: Encontro de certezas e ambiguidades. *Revista Diálogo Educacional, 6*(18), 35–47. https://doi.org/10.7213/rde.v6i18.3226 (ERIC)

Búrigo, E. Z. (2008). A modernização possível e necessária da matemática escolar segundo Osvaldo Sangiorgi. In W. R. Valente (Org.), *Osvaldo Sangiorgi: Um professor moderno* (pp. 43–67). Annablume; CNPq; GHEMAT. (Repositório UFSC)

D'Ambrosio, B. S. (1987). *The dynamics and consequences of the modern mathematics reform movement for Brazilian mathematics education* [Doctoral dissertation, Indiana University].

Duarte, A. R. S. (2007). *Matemática e educação matemática: A dinâmica de suas relações ao tempo do movimento da matemática moderna no Brasil* [Tese de doutorado, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo]. https://tede2.pucsp.br/handle/handle/11261 (Tede PUCSP)

Fiorentini, D. (1995). Alguns modos de ver e conceber o ensino da matemática no Brasil. *Zetetiké, 3*(1), 1–38. https://doi.org/10.20396/zet.v3i4.8646877 (Portal de Periódicos)

Fischer, M. C. B. (2008). Formação de professores em tempos de matemática moderna: Uma proposta de investigação histórica. *Revista Diálogo Educacional, 8*(25), 663–674. https://doi.org/10.7213/rde.v8i25.3745 (Periódicos PUCPR)

Giovanni, J. R., Castrucci, B., & Giovanni Júnior, J. R. (1998). *A conquista da matemática: 5ª série – Manual do professor*. FTD.

Matos, J. M., & Valente, W. R. (Eds.). (2010). *A reforma da Matemática Moderna em contextos ibero-americanos*. UIED (FCT/UNL). https://run.unl.pt/handle/10362/5321 (Run UNL)

Ministério da Educação. (2020, 24 de setembro). *Conheça a história da educação brasileira*. https://www.gov.br/mec/pt-br/acesso-a-informacao-paginas-unicas/conheca-a-historia-da-educacao-brasileira

Miorim, M. A. (2005). Livros didáticos de matemática do período de implantação do movimento da matemática moderna no Brasil. In *Anais do V Congresso Ibero-americano de Educação Matemática (CIBEM)* (Vol. 1, pp. 1–20). Universidade do Porto. [CD-ROM] (Brazilian Journals)

O Baricentro da Mente. (2018, 13 de junho). *Biografia de Antonio José Lopes Bigode*. https://www.obaricentrodamente.com/2018/06/biografia-de-antonio-jose-lopes-bigode.html

Pinto, N. B. (2009). Um estudo histórico sobre o uso dos livros didáticos de matemática. *Revista HISTEDBR On-line, 9*(34), 62–72. https://doi.org/10.20396/rho.v9i34.8639579 (ResearchGate)

Quintella, A. (1959). *Matemática para a primeira série ginasial* (68ª ed.). Companhia Editora Nacional.

Quintella, A. (1966). *Matemática: Para o primeiro ano colegial* (121ª ed.). Companhia Editora Nacional.

Sangiorgi, O. (1955). *Matemática para a primeira série ginasial* (11ª ed.). Companhia Editora Nacional.

Sangiorgi, O. (1966). *Matemática: Um curso moderno* (8ª ed.). Companhia Editora Nacional.

Santos, J. L. S. dos. (2015). *O movimento da matemática moderna e o ensino das operações com números fracionários: Uma análise histórica de livros didáticos* [Dissertação de mestrado, Universidade de São Paulo, Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação]. https://teses.usp.br/teses/disponiveis/55/55136/tde-20102016-164328/pt-br.php (Tese USP)

Soares, F. (2001). *Movimento da Matemática Moderna no Brasil: Avanço ou retrocesso?* [Dissertação de mestrado, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro]. https://app.uff.br/riuff/handle/1/2191 (Portal de Acesso UFF)

Valente, W. R. (2008). Livro didático e educação matemática: Uma história inseparável. *Zetetiké, 16*(30), 139–162. https://doi.org/10.20396/zet.v16i30.8646894 (Histemat)

Valente, W. R. (2008a). Osvaldo Sangiorgi e o Movimento da Matemática Moderna no Brasil. *Revista Diálogo Educacional, 8*(25), 583–613. https://doi.org/10.7213/rde.v8i25.3724 (Google Acadêmico)

Wielewski, G. D. (2008). O movimento da matemática moderna e a formação de grupos de professores de matemática no Brasil. In *ProfMat 2008* (pp. 1–10). Associação de Professores de Matemática. http://www.apm.pt/files/_Co_Wielewski_4867d3f1d955d.pdf

PAMELA GONÇALVES: Doutoranda no Programa de Educação em Ciências e Educação Matemática linha de pesquisa Educação Matemática (PPGECEM/Unioeste). Mestre em Educação pela Universidade Estadual do Oeste do Paraná - Unioeste (2017). Graduação em Matemática pela Universidade Estadual do Oeste do Paraná (2008) e especialização em Ensino de Ciências e Matemática pela Universidade Estadual do Oeste do Paraná (2010). Integrante do Grupo de Pesquisa em Formação de Professores de Ciências e Matemática FOPECIM/Unioeste.

E-mail: pangoncalves@gmail.com
https://orcid.org/0000-0001-7851-4501

VITÓRIA FENILLI VIDALETTI: Possui mestrado em Engenharia de Energia na Agricultura - Unioeste. Doutorado em andamento no Programa de Educação em Ciências e Educação Matemática (PPGECEM/Unioeste), linha de pesquisa Educação Matemática. Membro dos grupos de pesquisa Investigação Fenomenológica na Educação Matemática (IFEM) e Centro Italiano di Ricerche Fenomenologiche (CIRF). Estuda temas relacionados à Autismo, Fenomenologia e Educação Matemática.

E-mail: vitoria_fenilli@hotmail.com
https://orcid.org/0000-0003-2273-645X

DULCYENE MARIA RIBEIRO: Possui graduação em Matemática (2000) e mestrado em Educação Matemática (2003) pela Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho – Unesp. Doutorado em Educação pela Universidade de São Paulo - USP (2009), com estágio (doutorado sanduíche) na Universidade de Lisboa e pós-doutorado na Universidade de Lisboa (2019). É professora efetiva da Universidade Estadual do Oeste do Paraná (Unioeste) no Curso de Matemática e no Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Educação Matemática PPGECEM. Foi coordenadora geral do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência da Unioeste (Pibid). Integrante do Grupo de Pesquisa em Formação de Professores de Ciências e Matemática FOPECIM/Unioeste.

E-mail: dulcyene.ribeiro@unioeste.br
https://orcid.org/0000-0002-5602-8032

Recebido em: 26.02.2025
Aprovado em: 05.08.2025
Publicado em: 14.09.2025

EDITOR-ASSOCIADO RESPONSÁVEL:
Wagner Valente Rodrigues (Unifesp)
E-mail: wagner.valente@unifesp.br
https://orcid.org/0000-0002-2477-6677

RODADAS DE AVALIAÇÃO:
R1: dois convites; dois pareceres recebidos.
R2: dois convites; um parecer recebido.

COMO CITAR ESTE ARTIGO:
Gonçalves, P., Vidaletti, V. F., & Ribeiro, D. M. Introdução da ideia de fração e frações equivalentes em livros didáticos brasileiros do século XX. *Revista Brasileira de História da Educação, 25,* e384. DOI: https://doi.org/10.4025/rbhe.v25.2025.e384

FINANCIAMENTO:
A RBHE conta com apoio da Sociedade Brasileira de História da Educação (SBHE) e do Programa Editorial (Chamada Nº 30/2023) do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).

LICENCIAMENTO:
Este artigo é publicado na modalidade Acesso Aberto sob a licença Creative Commons Atribuição 4.0 (CC-BY 4).