

Shear force and torsion in reinforced concrete beam elements: theoretical analysis based on Brazilian Standard Code ABNT NBR 6118:2007

Solicitações tangenciais em elementos lineares de concreto armado: análise teórica baseada na ABNT NBR 6118:2007



R. BARROS^a
barrosrn@sc.usp.br

J.S. GIONGO^b
jsgiongo@sc.usp.br

Abstract

Reinforced concrete beam elements are submitted to applicable loads along their life cycle that cause shear and torsion. These elements may be subject to only shear, pure torsion or both, torsion and shear combined. The Brazilian Standard Code ABNT NBR 6118:2007 [1] fixes conditions to calculate the transverse reinforcement area in beam reinforced concrete elements, using two design models, based on the strut and tie analogy model, first studied by Mörsh [2]. The strut angle θ (theta) can be considered constant and equal to 45° (Model I), or varying between 30° and 45° (Model II). In the case of transversal ties (stirrups), the variation of angle α (alpha) is between 45° and 90° . When the equilibrium torsion is required, a resistant model based on space truss with hollow section is considered. The space truss admits an inclination angle θ between 30° and 45° , in accordance with beam elements subjected to shear. This paper presents a theoretical study of models I and II for combined shear and torsion, in which ranges the geometry and intensity of action in reinforced concrete beams, aimed to verify the consumption of transverse reinforcement in accordance with the calculation model adopted. As the strut angle on model II ranges from 30° to 45° , transverse reinforcement area (A_{sw}) decreases, and total reinforcement area, which includes longitudinal torsion reinforcement (A_{st}), increases. It appears that, when considering model II with strut angle above 40° , under shear only, transverse reinforcement area increases 22% compared to values obtained using model I.

Keywords: reinforced concrete, calculation models, shear force, torsion.

Resumo

Elementos lineares em concreto armado estão sujeitos a solicitações tangenciais ao longo de sua vida útil. Tais solicitações são oriundas de dois esforços solicitantes: força cortante e momento torçor, podendo haver ação combinada destes esforços. A ABNT NBR 6118:2007 [1] fixa as condições para o cálculo da área de armadura transversal para absorver as tensões provenientes da força cortante, admitindo dois modelos teóricos baseados na analogia de treliça de banzos paralelos, inicialmente estudada por Mörsh [2]. O ângulo θ de inclinação da biela de compressão pode ser considerado constante e igual a 45° (Modelo I) ou variando entre 30° e 45° (modelo II). Quando o momento torçor é necessário ao equilíbrio da estrutura, considera-se um modelo resistente constituído por uma treliça espacial de seção vazada. Essa treliça admite ângulos de inclinação variando entre 30° e 45° em concordância com o modelo resistente à força cortante. Apresenta-se um estudo teórico a respeito dos modelos de cálculo I e II para força cortante combinados com a ação de momento torçor, no qual variaram-se a geometria e a intensidade das ações em vigas de concreto armado, cujo objetivo foi verificar o consumo de armadura transversal em função do modelo de cálculo adotado. À medida que o ângulo θ diminui no modelo de cálculo II, tem-se redução na área de armadura transversal (A_{sw}) e aumento na área total que considera a armadura longitudinal de torção (A_{st}). Verifica-se ainda que, ao considerar o modelo de cálculo II com ângulo θ acima de 40° quando da atuação apenas da força cortante, tem-se aumento em até 22% na área de armadura transversal, quando comparada com a armadura obtida utilizando o modelo de cálculo I.

Palavras-chave: concreto armado, modelo de cálculo, força cortante, momento torçor.

^a Doutorando em Engenharia de Estruturas, Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, barrosrn@sc.usp.br, Av. Trabalhador São-carlense, 400, CEP: 13566-590, São Carlos-SP, Brasil;

^b Professor Doutor, Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, jsgiongo@sc.usp.br, Av. Trabalhador São-carlense, 400, CEP: 13566-590, São Carlos-SP, Brasil.

1. Introdução

A ABNT NBR 6118:2007 [1] fixa condições para a verificação de elementos lineares submetidos à força cortante, eventualmente combinada com outros esforços solicitantes, possibilitando dois modelos de cálculo. Tais modelos se fundamentam na analogia de treliça de banzos paralelos, inicialmente estudada por Mörsch [2], na qual o ângulo θ de inclinação da biela (diagonal comprimida) pode ser considerado constante e igual a 45° (modelo I) ou variando entre 30° e 45° (modelo II). A armadura transversal, por sua vez, pode apresentar inclinação variando entre 45° e 90° , sendo que usualmente é utilizado nos projetos estribos com inclinação igual a 90° .

O objetivo desse trabalho é apresentar a análise das diferenças percentuais que se obtêm nos valores das áreas de armadura transversal de vigas de concreto armado em relação aos modelos de cálculo I e II. O método utilizado consiste em análises teóricas baseadas nas equações dos modelos de cálculo presentes na ABNT NBR 6118:2007 [1]. Apresentam-se as particularidades de cada modelo de cálculo, seguido de um estudo comparativo a respeito dos principais parâmetros que compõe cada modelo. Nesse aspecto, apresentam-se análises dos resultados dos cálculos das áreas das armaduras oriundas da ação isolada de força cortante e momento torçor, bem como da ação conjunta destes esforços.

1.1 Estudos iniciais

O modelo clássico de cálculo de elementos lineares submetidos à força cortante é baseado na treliça clássica de Mörsch [2], que considera a viga com um comportamento análogo ao de uma treliça isostática, na qual os banzos superiores e inferiores são paralelos entre si, e representados respectivamente pela região de concreto comprimido e pela armadura longitudinal de tração da viga. Entre os banzos existem diagonais de concreto comprimido inclinadas a 45° em relação ao eixo longitudinal da viga, e um tirante inclinado de um ângulo α que pode variar de 45° a 90° , situado transversalmente às fissuras do concreto.

Nesse modelo de treliça, as forças nas bielas de compressão e nos tirantes aumentam de intensidade do centro da viga em direção aos apoios, região em que a força cortante apresenta seu valor máximo. Em contra partida, as forças no banzo comprimido e na armadura longitudinal de tração alcançam seus valores máximos em regiões próximas ao meio do vão.

Ensaio realizados por Leonhardt & Mönig [3] constataram que as tensões medidas na armadura transversal eram menores do que as previstas no cálculo, levando a crer que o modelo teórico da treliça clássica conduzia a valores elevados de armadura transversal.

As observações feitas por Leonhardt & Mönig [3] se devem a alguns fatores. O primeiro deles é que o banzo comprimido apresenta-se relativamente inclinado em relação ao banzo tracionado, o que possibilita uma absorção direta de uma parcela da força cortante pelo concreto. Em função dessa inclinação, a força R_{st} que atua na armadura longitudinal é maior do que a força R_{cc} que atua no banzo comprimido de concreto. Em relação às diagonais, as fissuras e, portanto, as bielas que ficam entre elas possuem inclinação variável em relação ao eixo longitudinal da viga apresentando-se com inclinações inferiores à 45° .

Atribui-se ainda à diminuição relativa da tensão na armadura

transversal a esquemas alternativos de absorção da força cortante desenvolvidos em conjunto com a treliça. Esses esquemas são o efeito de arco, efeito de engrenamento dos agregados e efeito de pino das barras da armadura longitudinal. Em função desses mecanismos alternativos, considera-se um valor de redução V_c da força cortante, cujo objetivo é tornar o modelo teórico mais próximo do modelo real.

2. Modelos de cálculo para força cortante

Os modelos de cálculo I e II presentes na ABNT NBR 6118:2007 [1] provocam discussão a respeito de sua utilização. Mota & Laranjeiras [4] concluíram por meio de lista de discussão eletrônica que o modelo de cálculo I não é um caso particular do modelo de cálculo II. Savaris & Garcia [5] desenvolveram um estudo a respeito do ângulo ótimo para a biela e para o tirante, buscando um consumo mínimo da área das barras das armaduras transversal e longitudinal. Os pesquisadores constataram que o modelo I conduz a um valor mínimo de consumo de armadura, desde que utilizado com estribos inclinados entre 55° e 60° . Entretanto, a utilização de estribos inclinados não é adotada com frequência pelo meio técnico, pois requer maiores cuidados no detalhamento e na armação das vigas durante as etapas construtivas.

Barros & Giongo [6] verificaram que existe uma relação entre a área das barras da armadura transversal obtidas segundo os modelos de cálculo I e II, e que essa relação independe da geometria do elemento estrutural, bem como da intensidade das ações.

Os modelos de cálculo apresentados na ABNT NBR 6118:2007 [1] para verificação da segurança de elementos lineares submetidos à força cortante apresentam situações em comum. Para ambos os modelos, considera-se que todos esses elementos precisam dispor de armadura transversal mínima, constituídas por estribos, cuja taxa geométrica mínima ($\rho_{sw,min}$) depende da resistência média à tração do concreto e da resistência característica ao escoamento do aço da armadura transversal. Ambos os modelos admitem estribos com inclinação variável entre 45° e 90° , e estipulam um valor máximo para a força cortante de cálculo V_{sd} . Este valor considera a capacidade resistente da biela de compressão, denominada V_{Rd2} , cuja expressão depende de cada modelo de cálculo. Essa limitação visa impedir que a ruína dos elementos submetidos a força cortante ocorra por ruptura do concreto da diagonal comprimida.

As expressões apresentadas nos próximos itens e presentes na ABNT NBR 6118:2007 [1] seguem as indicações do código Modelo do CEB-FIP [7], cujas deduções podem ser encontradas em Mangini [8].

2. Modelo de cálculo I

O modelo de cálculo I admite que as bielas de compressão têm inclinação θ constante em relação ao eixo longitudinal do elemento com valor igual a 45° . Além disso, considera uma parcela V_c de redução da força cortante resistente de cálculo V_{Rd3} , em função dos esquemas alternativos aos da treliça, descritos anteriormente. Nas situações de flexão simples e de flexo-tração em que a linha neutra corta a seção do elemento estrutural, a parcela V_c se torna igual a V_{co} , sendo seu valor constante e independe do valor da solitação de cálculo, V_{sd} .

A verificação da biela de compressão do concreto é feita por meio

da equação (1), enquanto que o cálculo da armadura transversal é dado pela equação (2).

$$V_{sd} \leq V_{Rd2} = 0,27 \cdot (1 - f_{ck} / 250) \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot d \quad (1)$$

$$V_{sw} = \left(\frac{A_{sw}}{s} \right) \cdot 0,9 \cdot d \cdot f_{ywd} \cdot (\text{sen} \alpha + \text{cos} \alpha) \quad (2)$$

As equações (3) e (4) apresentam os critérios de segurança da armadura transversal. Nessas equações, o valor de f_{ctd} , que é o valor de cálculo da resistência do concreto à tração direta, é obtido em função da resistência característica à compressão (f_{ck}), conforme equação (5).

$$V_{sd} \leq V_{Rd3} = V_c + V_{sw} \quad (3)$$

$$V_{c0} = 0,6 \cdot f_{ctd} \cdot b_w \cdot d \quad (4)$$

$$f_{ctd} = 0,15 \cdot \sqrt[3]{f_{ck}^2} \quad (5)$$

A ABNT NBR 6118:2007 [1] indica que, quando a armadura longitudinal de tração for obtida considerando o equilíbrio de forças na seção normal ao eixo do elemento estrutural, os efeitos provocados pela fissuração oblíqua podem ser substituídos no cálculo pela decalagem (a_t) do diagrama de força no banzo tracionado. Essa decalagem depende do valor de cálculo da força cortante (V_{sd}), da parcela (V_c), da altura útil ("d") do elemento estrutural e do ângulo α de inclinação dos estribos.

Apesar de não estar explícito na norma, o valor de a_t precisa ser limitado ao valor da altura útil (d) do elemento, sendo esse parâmetro necessário para a determinação do comprimento final das barras das armaduras longitudinais de tração, influenciando diretamente no consumo de armadura da viga. Um modo de diminuir o valor da decalagem no modelo I e, por consequência, o comprimento das barras da armadura longitudinal, é considerar que toda a força cortante é absorvida pelos estribos, o que implica em considerar o valor de V_c igual a zero. Essa consideração provoca aumento na área da armadura transversal, porém, como numa viga de concreto armado o volume de aço da armadura longitudinal é muito superior ao volume de aço da armadura transversal, há economia no consumo de aço da viga.

2.2 Modelo de cálculo II

O modelo de cálculo II para determinação da área das barras da armadura transversal admite que as bielas de compressão possuam inclinação variável em relação ao eixo longitudinal da peça, compreendida no intervalo $30^\circ \leq \theta \leq 45^\circ$. Esse modelo considera que a parcela V_c de redução da força cortante resistente de cálculo (V_{Rd3}), em função dos esquemas alternativos aos da treliça, é variável. Nessa hipótese, a parcela V_c depende do valor da força cortante solicitante de cálculo, (V_{sd}) e da força cortante resistente de cálculo, (V_{Rd2}), diferente do que ocorre no modelo I, em que o valor de V_c é constante. O valor de V_c torna-se igual a V_{c1} na flexão simples e na flexo-tração em que a linha neutra corta a seção do elemento estrutural, podendo ser obtido a partir da equação (6).

$$V_{c1} = \left(\frac{V_{Rd2} - V_{sd}}{V_{Rd2} - V_{c0}} \right) \cdot V_{c0} \quad (6)$$

A expressão anterior foi deduzida por interpolação linear, uma vez que o valor de V_{c1} é igual a V_{c0} quando V_{sd} assumir valor igual ao próprio V_{c0} . Do mesmo modo, V_{c1} torna-se igual a zero quando a força cortante solicitante de cálculo V_{sd} assumir valor igual ao da força cortante resistente de cálculo, (V_{Rd2}).

O valor da força cortante resistente de cálculo relativa a capacidade das diagonais comprimidas é calculado por meio da equação (7), enquanto que o cálculo da armadura transversal é feito com base na equação (8). Observa-se que quando o ângulo θ é igual a 45° na equação (7), a mesma fica igual a equação para força cortante resistente de cálculo obtida utilizando o modelo de cálculo I.

$$V_{sd} \leq V_{Rd2} = 0,54 \cdot (1 - f_{ck} / 250) \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot d \cdot \text{sen}^2 \theta \cdot (\cot g \alpha + \cot g \theta) \quad (7)$$

$$V_{sw} = \left(\frac{A_{sw}}{s} \right) \cdot 0,9 \cdot d \cdot f_{ywd} \cdot (\cot g \alpha + \cot g \theta) \cdot \text{sen} \alpha \quad (8)$$

Em relação a decalagem (a_t) do diagrama de força no banzo tracionado para o modelo de cálculo II, a decalagem depende do valor da altura útil ("d") do elemento estrutural, do ângulo θ de inclinação da biela e do ângulo α de inclinação dos estribos, e o valor de a_t precisa ser limitado ao valor da altura útil do elemento. Desse modo, verifica-se que quanto menor for o ângulo θ de inclinação da biela maior será o valor de a_t e, consequentemente, maior será o comprimento das barras da armadura longitudinal, o que tende a aumentar o consumo total de aço da viga em análise. Diferente do modelo de cálculo I, considerar que toda a força cortante é absorvida pelos estribos não influencia no valor da decalagem nem no consumo de armadura longitudinal.

3. Análise dos resultados entre os modelos de cálculo I e II

A principal diferença entre os modelos de cálculo I e II propostos na ABNT NBR 6118:2007, é a consideração do ângulo θ constante e igual a 45° no modelo I, e variando entre 30° e 45° no modelo II. Para ambos os modelos, os estribos podem ter inclinação α entre 45° e 90° . Para esse estudo, considerou-se o ângulo α igual a 90° , uma vez que esse valor é o mais utilizado nas estruturas por causa das facilidades construtivas. Outra razão para o uso do estribo vertical é que o estribo inclinado é ineficiente quando há inversão de carregamento, o que ocorre em regiões sujeitas a ocorrência de sismos.

Os dois modelos possibilitam a verificação da biela comprimida de concreto, por meio da parcela V_{Rd2} e posterior cálculo da área da armadura transversal A_{sw} . É admitida também uma redução no valor solicitante de cálculo, em função dos mecanismos complementares aos da treliça, apresentados anteriormente, sendo essa redução constante no modelo I para qualquer valor de solicitação, enquanto que no modelo de cálculo II a redução depende do valor da força cortante de cálculo (V_{sd}).

Desse modo, a primeira observação que se faz é que no modelo de cálculo II, à medida que a força solicitante aumenta, a força V_{c1} diminui, sendo igual a zero quando a força cortante de cálculo V_{sd} for a máxima, isto é, quando for igual à capacidade resistente da biela de compressão, definida por V_{Rd2} . Essa capacidade resistente, por sua vez, é constante no modelo de cálculo I, enquanto que no modelo de cálculo II é variável, apresentando redução em função do ângulo θ adotado. Consta-se que essa redução ocorre segundo uma relação que independe da geometria e da solicitação do elemento estrutural. Dividindo a equação (7) pela equação (1) obtém-se a relação entre as forças cortantes resistentes de cálculo V_{Rd2} , resultando na equação (9), a qual depende exclusivamente do ângulo de inclinação da biela de compressão.

Figura 1 – Relação entre força cortante resistente de cálculo relativo às diagonais comprimidas V_{Rd2} , para os modelos de cálculo I e II da ABNT NBR 6118:2007 (1)

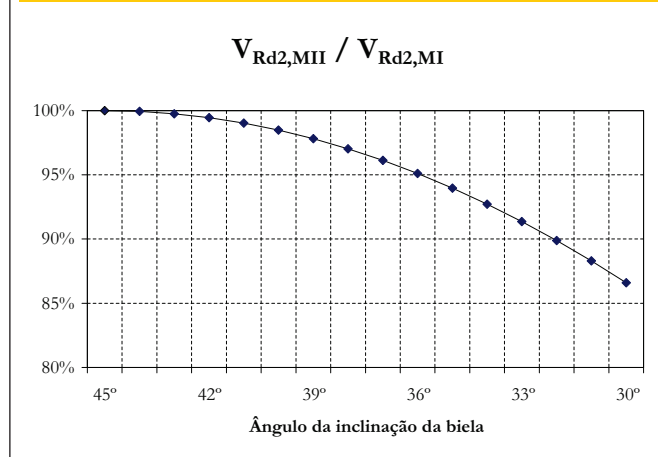
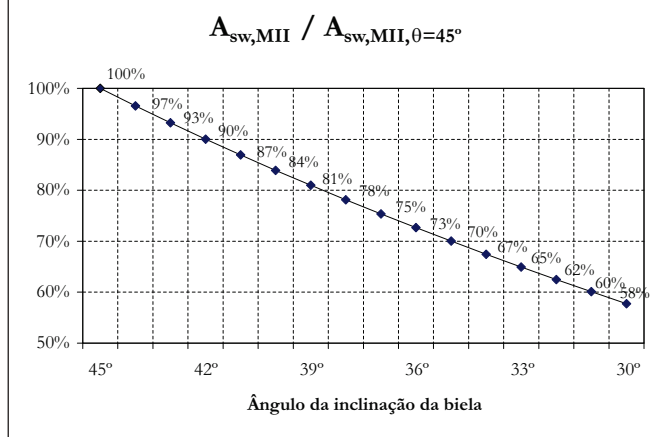


Figura 2 – Relação entre as áreas das armaduras transversais obtidas com o modelo de cálculo II e a área das barras considerando θ igual a 45° no modelo



$$\frac{V_{Rd2, MII}}{V_{Rd2, MI}} = \text{sen}(2\theta) \quad (9)$$

A Figura 1 apresenta a relação obtida por meio da equação (9). De acordo com a Figura 1, verifica-se que ao adotar o ângulo θ igual a 45° no modelo de cálculo II, obtém-se o mesmo valor para a força V_{Rd2} caso se utilize o modelo de cálculo I. Entretanto, observa-se que, à medida que a inclinação do ângulo θ diminui, o valor da força V_{Rd2} também diminui, de modo que para a inclinação mínima de θ igual a 30° , a capacidade resistente da biela apresenta redução para 87% do valor de V_{Rd2} obtido por meio do modelo de cálculo I. Diversos exemplos práticos apresentados em Barros & Giongo [6] confirmaram esses resultados.

Em relação ao cálculo da área das armaduras transversais, duas comparações distintas são feitas. A primeira trata dos resultados obtidos utilizando o modelo de cálculo II, enquanto a segunda compara os resultados do modelo de cálculo II com os resultados do modelo de cálculo I.

Em função da variação do ângulo θ entre 30° e 45° no modelo de cálculo II, observa-se redução no valor da área de armadura calculada à medida que o ângulo de inclinação da biela se aproxima de 30° . Observa-se ainda que, assim como a redução da força cortante resistente de cálculo, a relação entre as áreas da armadura transversal obtidas com o modelo de cálculo II ocorrem em função da tangente do ângulo θ relativo à biela de compressão, e não é influenciada pela geometria nem pelas ações atuantes no elemento estrutural.

Organizando a equação (8) para cálculo de A_{sw} e considerando estribos inclinados a 90° , obtém-se a relação entre as áreas das armaduras do modelo de cálculo II e as áreas das armaduras desse mesmo modelo, tomando como referência o ângulo de inclinação da biela igual a 45° . Essa relação é representada pela equação (10) com a qual pode-se obter o gráfico da Figura 2.

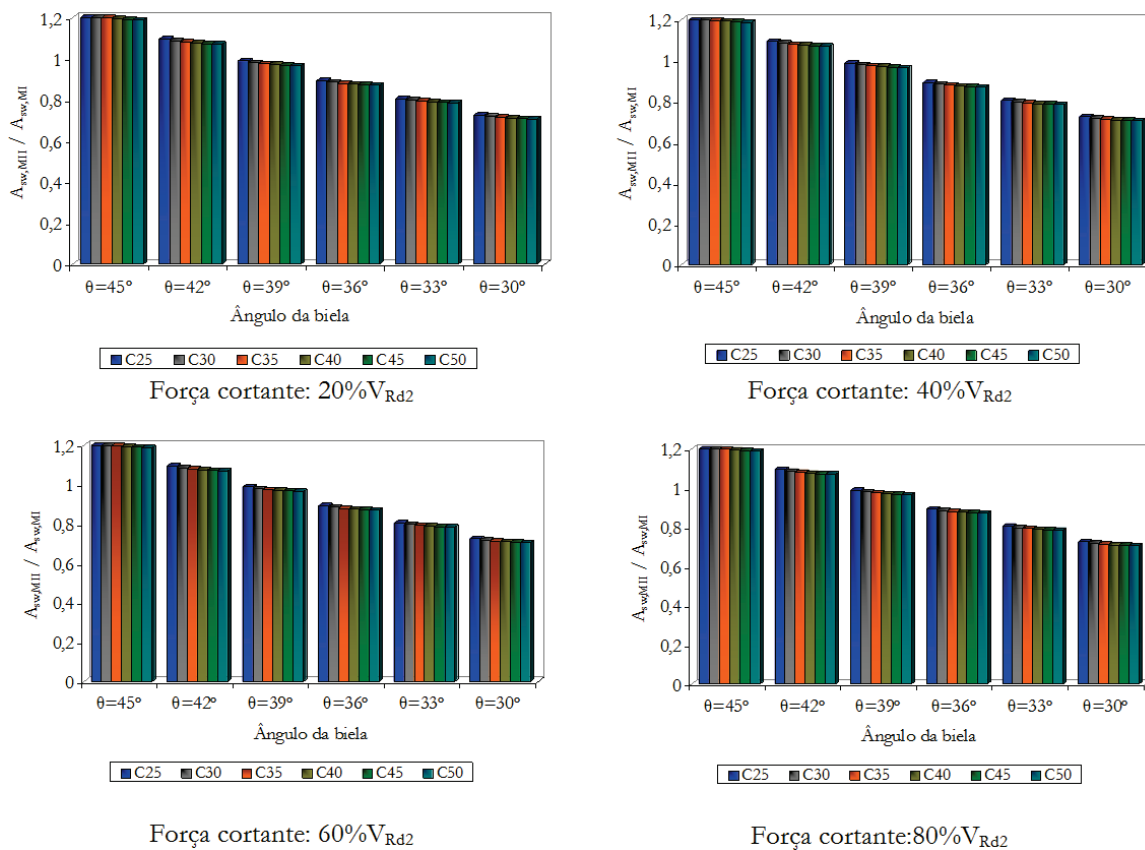
Tabela 1 - Percentual da área das barras da armadura transversal entre os modelos I e II

Força Cortante	Ângulos (graus)	$A_{sw(MI)}/A_{sw(MI)}(\%)$					
		C25	C30	C35	C40	C45	C50
20, 40, 60 e 80% de V_{Rd2}	$\Theta = 45^\circ$	122	121	120	119	119	119
	$\Theta = 42^\circ$	110	109	108	108	107	107
	$\Theta = 39^\circ$	99	98	98	97	97	97
	$\Theta = 36^\circ$	89	89	88	88	87	87
	$\Theta = 33^\circ$	81	80	79	79	79	79
	$\Theta = 30^\circ$	73	72	71	71	71	71

$$\frac{A_{sw,MII}}{A_{sw,MII,\theta=45^\circ}} = \tan(\theta) \quad (10)$$

A redução da área das armaduras é acompanhada da redução da força cortante resistente de cálculo relativa a ruína das diagonais comprimidas, (V_{Rd2}). Isto é, ao considerar o ângulo θ inferior a 45° ocorre uma penalização do valor máximo admitido para a força cortante solicitante de cálculo, conforme a equação (7).

Figura 3 - Redução percentual da área das barras da armadura transversal obtidas com os modelos de cálculo I e II em função do ângulo θ



A comparação entre os valores obtidos para as áreas das armaduras transversais entre os modelos de cálculo I e II apresenta maiores dificuldades em função dos diversos parâmetros envolvidos na análise. Observa-se que para determinado valor de força cortante solicitante de cálculo (V_{sd}), a parcela da força cortante resistida pela armadura transversal (V_{sw}) apresenta necessariamente valores distintos nos dois modelos de cálculo. Isso ocorre em virtude das diferentes considerações que cada modelo de cálculo utiliza em relação aos mecanismos complementares da treliça. Como apresentado anteriormente, o modelo de cálculo I considera uma parcela de redução constante (V_{c0}) dada pela equação (4) enquanto que no modelo de cálculo II a parcela de redução (V_{c1}) é variável, dependendo da intensidade da força cortante solicitante de cálculo e do próprio valor de (V_{c0}), conforme equação (6). Outro fator que apresenta influência nesse cálculo é que, na determinação da parcela (V_{c0}), o valor de f_{ctd} é obtido em função da classe do concreto, isto é, depende diretamente do valor da resistência característica à compressão do concreto, f_{ck} . Por fim, o valor de (V_{Rd2}) para o modelo de cálculo II depende do ângulo θ de inclinação da biela comprimida.

Destaca-se ainda que, em função do modelo de cálculo adotado, há valores diferentes para o comprimento final da armadura longitudinal da viga, em função da decalagem do diagrama de forças no banzo tracionado, conforme apresentado no item 2. Como o objetivo do trabalho é analisar apenas valores de armadura transversal, as áreas das barras das armaduras longitudinais não foram consideradas no presente estudo. Entretanto, ao comparar o consumo total de armadura na viga de concreto armado, essa consideração precisa ser feita.

Desse modo, constata-se que a comparação dos valores das áreas das armaduras transversais calculados com os modelos de cálculo I e II depende dos três parâmetros descritos anteriormente: intensidade da força cortante solicitante de cálculo, ângulo θ de inclinação da biela, bem como da classe do concreto que, de acordo com a ABNT NBR 6118:2007 [1], pode ser C25, C30, C35, C40, C45 e C50. A equação 11 apresenta a relação entre as áreas das armaduras transversais obtidas de acordo com os modelos de cálculo I e II. Nessa expressão, a parcela referente à V_{Rd2} refere-se ao modelo de cálculo II, podendo ser obtida com a equação (7).

$$\frac{A_{sw, MII}}{A_{sw, MI}} = \left[\frac{V_{Sd} - \left(\frac{V_{Rd2} - V_{Sd}}{V_{Rd2} - V_{c0}} \right) \cdot V_{c0}}{V_{Sd} - V_{c0}} \right] \cdot \tan(\theta) \quad (11)$$

Apresenta-se a seguir análise de resultados obtidos no cálculo da área de armadura transversal, quando da utilização dos modelos de cálculo I e II. Com o intuito de facilitar a análise dos resultados, o valor da força cortante solicitante de cálculo (V_{sd}) foi definido como uma porcentagem do valor da força cortante resistente de cálculo, (V_{Rd2}) do modelo II quando se considera o ângulo de inclinação da biela igual a 45° . Foram utilizadas quatro porcentagens para força cortante de cálculo, sendo esses valores iguais a 20%, 40%, 60% e 80% do valor de (V_{Rd2}). Desse modo, pode-se observar separadamente a influência que a intensidade da força

cortante de cálculo e a classe do concreto provocam na obtenção da área da armadura transversal.

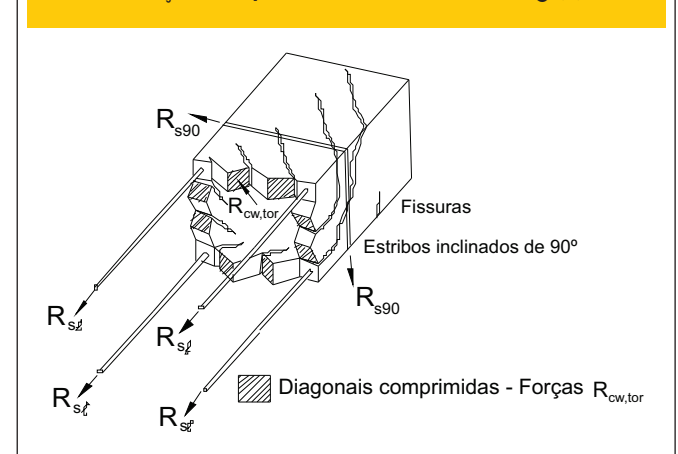
Constata-se que, à medida que o ângulo de inclinação da biela diminui de 45° para 30° , ocorre redução percentual da relação entre as áreas das armaduras obtidas com o modelo de cálculo II e I. Tomando como referência os resultados obtidos com o modelo de cálculo I, ao utilizar o modelo de cálculo II com ângulo de inclinação da biela igual a 45° , obtém-se o mesmo valor para força cortante resistente de cálculo (V_{Rd2}), porém com área de armadura transversal necessariamente maior. Constata-se também que o modelo de cálculo II sempre apresenta armadura maior que a obtida com o modelo de cálculo I quando da utilização de ângulos da biela entre 40° e 45° . Ao utilizar o ângulo da biela igual a 39° , o valor da área da armadura obtida com o modelo II apresenta o mesmo resultado que se obtém ao utilizar o modelo de cálculo I, porém apresenta menor capacidade resistente para a biela de compressão. Para valores de ângulo situados entre 30° e 38° , o modelo de cálculo II conduz a menores valores de área de armadura transversal, apresentando valor mínimo quando θ for igual a 30° .

Verifica-se ainda que, para uma mesma classe de concreto, o percentual de redução não é afetado pela intensidade das ações, permanecendo constante para qualquer que seja o valor da força cortante solicitante de cálculo (V_{sd}), conforme apresentado na tabela 1. Entretanto, observa-se que a mudança da classe do concreto provoca pequenas alterações no percentual de redução. Comparando os concretos das classes C25 e C50, a relação entre as áreas da armadura transversal obtida com o modelo de cálculo II e o modelo de cálculo I para ângulo da biela igual a 45° diminuiu de 122% para 119%. Do mesmo modo, ao considerar o ângulo da biela igual a 30° para essas mesmas classes, a relação percentual entre as áreas variou de 73% para 71%. A influência da classe do concreto pode ser observada nos gráficos da Figura 3.

4. Elementos lineares submetidos à torção

A ABNT NBR 6118:2007 [1] fixa condições para a verificação de elementos lineares submetidos à torção combinada com outros esforços

Figura 4 - Modelo de seção cheia fissurada submetida à Torção Simples - Leonhardt & Mönning (3)



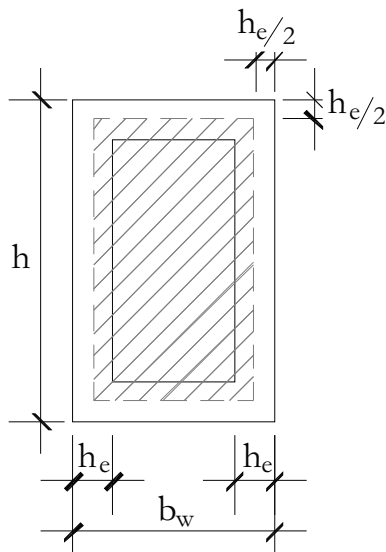
solicitantes, admitindo um modelo resistente constituído por uma treliça espacial, a qual é definida a partir de um elemento estrutural de seção vazada equivalente ao elemento estrutural a dimensionar. Permite-se que o ângulo θ de inclinação da biela tenha seu valor variando entre 30° e 45° , entretanto, não apresenta dois modelos de cálculo distintos tal como ocorre nos elementos lineares submetidos à ação de força cortante. Todavia, a referida norma exige que, quando da combinação de torção com força cortante, os ângulos de inclinação das bielas devem ser os mesmos para determinação das resistências.

A Figura 4 apresenta as forças resultantes nas barras das armaduras existentes numa peça estrutural submetida exclusivamente à ação de momento torçor. A força R_{st} representa a resultante das tensões de tração nas barras da armadura longitudinal distribuídas ao longo da seção do elemento, enquanto que a força R_{s90} representa a resultante das tensões de tração nos estribos posicionados a 90° em relação ao eixo da peça. As forças $R_{cw,tor}$ representam as resultantes das tensões de compressão que surgem nas diagonais comprimidas.

Baseado nos resultados apresentados por Leonhardt & Mönning [3] e na idealização da treliça espacial, a ABNT NBR 6118:2007 [1] indica um modelo de cálculo para os elementos lineares submetidos à torção. Admite-se que as armaduras transversais possuam inclinações variando entre 45° e 90° , e que o momento torçor solicitante de cálculo deve ser necessariamente menor ou igual à capacidade resistente da biela de compressão, (T_{Rd2}), a qual é calculada pela expressão (12). Nessa expressão, o valor de A_e representa a área delimitada pela linha média da parede de seção vazada e h_e é a medida da espessura dessa parede fictícia.

$$T_{sd} \leq T_{Rd2} = 0,50 \cdot (1 - f_{ck} / 250) \cdot f_{ctd} \cdot A_e \cdot h_e \cdot \text{sen}(2\theta) \quad (12)$$

Figura 5 - Representação da área A_e no modelo de cálculo a torção



Além da verificação da diagonal comprimida, é necessário efetuar a verificação quanto à resistência das armaduras transversais e longitudinais. No caso das armaduras transversais, quando as mesmas apresentarem o ângulo igual a 90° , a condição de resistência fica garantida a partir da equação (13). Nessa equação, o valor de A_{90} representa a área da seção transversal do número de ramos de um estribo, que deve estar contido na região da parede fictícia. Em relação às armaduras longitudinais, deve-se satisfazer a condição dada pela equação (14).

$$T_{sd} = T_{Rd,3} = \left(\frac{A_{90}}{s} \right) \cdot f_{ywd} \cdot 2 \cdot A_e \cdot \cot g\theta \quad (13)$$

$$T_{sd} = T_{Rd,4} = \left(\frac{A_{st}}{u_e} \right) \cdot f_{ywd} \cdot 2 \cdot A_e \cdot \text{tg}\theta \quad (14)$$

Na equação (14), o termo u_e representa o perímetro da área A_e . A armadura longitudinal de torção A_{st} pode ter arranjo das barras distribuídas ao longo desse perímetro ou concentradas nos cantos do polígono que delimita a área A_e , mantendo-se obrigatoriamente constante a relação entre a parcela da área total calculada A_{st} e a parcela do perímetro da área A_e . A Figura 5 apresenta uma seção retangular de concreto armado, na qual se delimita a espessura fictícia em função da espessura h_e . Sendo b_w a largura da seção e h a altura da mesma, os valores de A_e e u_e podem ser obtidos por meio das equações (15) e (16), respectivamente.

$$A_e = (b_w - h_e) \cdot (h - h_e) \quad (15)$$

Figura 6 - Relação entre momento resistente de cálculo à torção relativo às diagonais comprimidas T_{Rd2} para diversos valores de inclinação da biela

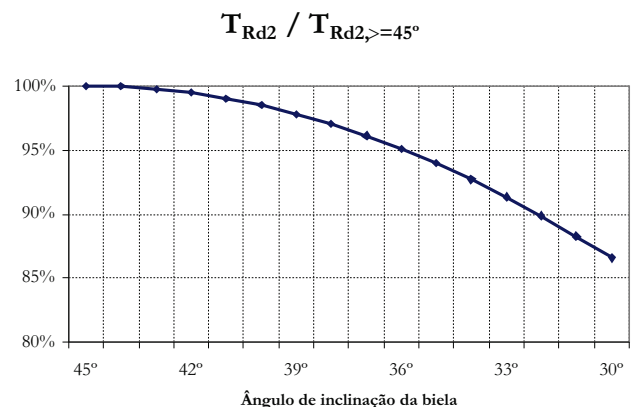
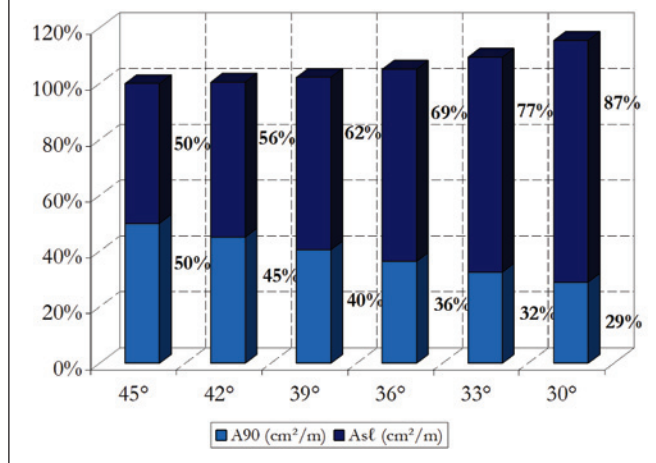


Figura 7 – Distribuição percentual das armaduras de torção A_{90} e A_{st}



$$u_e = 2 \cdot (b_w - h_e) + 2 \cdot (h - h_e) \quad (16)$$

4.1 Efeitos do momento torçor atuando isoladamente

A possibilidade de variar o ângulo de inclinação da biela de compressão quando da ocorrência de torção em elementos lineares possibilita análise semelhante à realizada no item 3 em relação a força cortante.

Analisando particularmente a biela comprimida, verifica-se que o momento torçor resistente de cálculo T_{Rd2} apresenta variação semelhante a da força cortante resistente de cálculo V_{Rd2} . Tomando como referência o momento torçor resistente quando adotado ângulo da biela igual a 45°, observa-se uma redução da capacidade resistente da biela à medida que o ângulo θ se aproxima de 30° conforme equação (17). Esse resultado é coerente com o resultado obtido para força cortante, indicando que a relação entre as capacidades resistentes das bielas depende unicamente do valor do ângulo de inclinação θ considerado nas análises. A relação percentual obtida por meio da equação (17) encontra-se na Figura 6.

$$\frac{T_{Rd2}}{T_{Rd2,\theta=45^\circ}} = \text{sen}(\theta) \quad (17)$$

Do mesmo modo, observa-se que a relação entre as áreas das armaduras transversais e longitudinais definidas pelas parcelas T_{Rd3} e T_{Rd4} , respectivamente, quando da variação da inclinação da diagonal comprimida, apresentam uma relação que depende exclusivamente do ângulo de inclinação dessa biela. No caso da armadura transversal, a relação entre as áreas A_{90} dependem da tangente do ângulo θ , enquanto que para as armaduras longitudi-

nais, a relação entre as áreas A_{st} variam de acordo com a cotangente do ângulo θ .

Sendo assim, pode-se afirmar que à medida que o ângulo da biela diminui de 45° para 30°, observa-se uma diminuição gradual do valor da área de armadura transversal A_{90} semelhante a apresentada na Figura 2, relativa a armadura calculada para a força cortante. Em contra partida, observa-se um aumento significativo da área de armadura longitudinal A_{st} à medida que o ângulo da biela se aproxima de 30°. Constata-se que o maior aumento ocorre para θ igual a 30°, situação em que a área de armadura longitudinal apresenta valor 173% em relação a área obtida caso fosse utilizado o ângulo θ igual a 45°.

Analisando a armadura total necessária para resistir ao momento torçor, isto é, a combinação das áreas obtidas para A_{90} e A_{st} , obtém-se relações entre as áreas que dependem apenas do ângulo de inclinação da biela. Verifica-se que o menor valor de armadura total é obtido quando da consideração do ângulo θ igual a 45°, situação em que as áreas das armaduras transversais e longitudinais apresentam o mesmo valor. À medida que o ângulo θ diminui, verifica-se que o aumento da armadura longitudinal A_{st} é superior a redução apresentada pela armadura transversal A_{90} conforme pode ser observado na Figura 7. Nessa situação, observa-se um aumento de 16% em relação a área total obtida para ângulo igual a 45°.

4.2 Efeitos do momento torçor e da força cortante combinados

Quando o elemento estrutural estiver submetido aos efeitos combinados de momento torçor e força cortante, algumas considerações precisam ser feitas visando à segurança estrutural. A primeira diz respeito à adoção de ângulos de inclinação da biela iguais, o que torna coerente a análise da segurança do elemento estrutural quanto a momento torçor e força cortante.

A utilização de ângulo da biela inferior a 45° para a treliça espacial, a qual resiste ao momento torçor, implica necessariamente

Figura 8 – Armadura transversal total A_{90} e A_{sw} em relação à área obtida utilizando o modelo de cálculo I

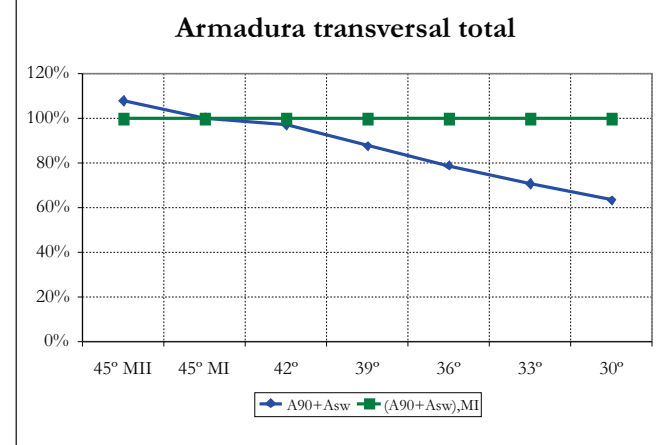
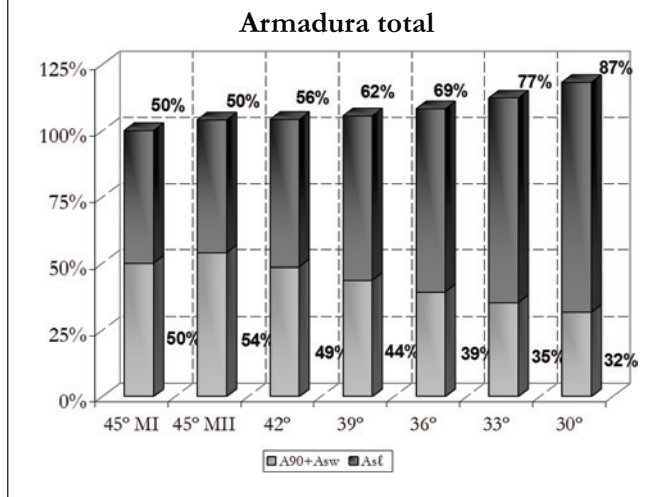


Figura 9 – Armadura total A_{90} , A_{sw} e A_{st} em relação à área obtida utilizando o modelo de cálculo I



na utilização do modelo de cálculo II para força cortante. Apenas quando o ângulo da biela for considerado igual a 45°, tem-se a opção de adotar o modelo de cálculo I para resistir aos efeitos da força cortante. Nessa situação, também poderia ser utilizado o modelo de cálculo II, entretanto, como apresentado no item 3, essa consideração conduz a valores elevados para a área de armadura transversal por causa da força cortante.

Outra consideração diz respeito à verificação da capacidade resistente da biela de compressão. Nesse caso, qualquer que seja o ângulo da biela e o modelo de cálculo considerado para análise, deve-se necessariamente satisfazer a condição expressa na equação (18). Essa condição considera a porcentagem que de cada um dos esforços requer de resistência da biela comprimida, não devendo em hipótese alguma ultrapassar 100% pois, à medida que se aproxima desta relação, indica que há maior probabilidade da ocorrência de ruína do elemento estrutural por ruptura do concreto da diagonal comprimida.

$$\frac{V_{sd}}{V_{Rd2}} + \frac{T_{sd}}{T_{Rd2}} \leq 1 \quad (18)$$

Em relação à área das armaduras, admite-se o princípio da superposição dos efeitos. Isto é, a armadura transversal total é dada pela soma das armaduras calculadas separadamente para os efeitos de momento torçor e força cortante, por meio das parcelas de A_{90} e A_{sw} . No caso da armadura lateral A_{st} , é calculada apenas na situação em que ocorrer torção, podendo ser distribuída ao longo do perímetro equivalente da seção de concreto, ou disposta nos vértices da seção.

Verifica-se que à medida que o ângulo de inclinação da biela varia de 45° para 30°, o valor da armadura transversal total diminui, tendo em vista que tanto a parcela de A_{sw} como a de A_{90} diminuem. Desse modo, a armadura transversal total tem seu valor máximo

caso considere-se o modelo de cálculo II para força cortante com ângulo igual a 45°, e tem seu valor mínimo caso considere-se o mesmo modelo com ângulo de inclinação da biela igual a 30°. Verifica-se que o uso do modelo de cálculo I fornece valores intermediários para armadura transversal total. A Figura 8 apresenta a área de armadura transversal total em relação ao modelo de cálculo I.

A princípio, o gráfico da Figura 8 induz o leitor a acreditar que a situação em que se obtém maior economia de armadura é a consideração do modelo de cálculo II com ângulo da biela igual a 30°. Entretanto, essa conclusão se mostra equivocada em face da existência da armadura longitudinal de torção, A_{st} e da decalagem do diagrama de forças no banzo tracionado, que não foi considerado nesse estudo. Verificou-se que esta armadura apresenta maiores valores à medida que o ângulo de inclinação da biela se aproxima de 30°, conforme apresentado no item 4.1. Essa armadura precisa ser considerada no cálculo da armadura total, para então poder comparar qual situação de cálculo conduz a um menor consumo de armadura total.

Verifica-se, portanto, que a utilização do modelo de cálculo I conduz a maior economia de aço quando comparadas as alternativas que se dispõe no modelo de cálculo II para consideração do ângulo θ de inclinação da biela. A Figura 9 apresenta a distribuição percentual de armadura transversal total, A_{90} e A_{sw} , e de armadura longitudinal de torção A_{st} , em relação aos valores obtidos utilizando o modelo de cálculo I. Observa-se que quando da utilização do modelo de cálculo II com ângulo da biela igual a 30°, a armadura total apresenta-se 19% maior do que a obtida com o modelo de cálculo I. Essa situação ocorre em virtude da maior parte da área total de armadura ser representada pela armadura longitudinal de torção A_{st} .

5. Conclusão

Apresentou-se análise dos resultados dos cálculos das áreas das armaduras transversais oriundas da ação isolada de força cortante e momento torçor, bem como da ação conjunta desses esforços. Em todas as análises consideraram-se estribos verticais dispostos à 90°. Quando da atuação isolada da força cortante, as principais conclusões são:

- O modelo de cálculo I conduz a valores elevados para área de armadura transversal comparados com o modelo de cálculo II, quando se utiliza ângulo da biela com inclinação entre 30° e 39°. Esses resultados se justificam em virtude do modelo de cálculo I ser uma simplificação do modelo de cálculo II, portanto, tende a ser mais conservador quando se considera apenas os valores de armadura transversal, sem considerar o efeito da decalagem do diagrama de força no banzo tracionado.
- No modelo de cálculo II, quando utilizado ângulo da biela igual a 45°, obtém-se o mesmo valor para força cortante resistente de cálculo V_{Rd2} considerando o modelo I, porém com área de armadura transversal muito maior. Para ângulo da biela situados entre 40° e 45°, observa-se redução dos valores de V_{Rd2} e A_{sw} , porém a área de armadura continua superior a obtida com o modelo de cálculo I.
- Com base nos resultados apresentados, não se justifica utilizar o modelo de cálculo II adotando ângulo da biela no intervalo de 40° a 45°.
- A adoção do ângulo de inclinação da biela igual a 39° para

o modelo de cálculo II resulta na mesma área de armadura transversal que se obtém ao utilizar o modelo de cálculo I, porém com menor capacidade resistente da biela.

- Na comparação dos resultados de área de armadura do modelo de cálculo II em relação ao Modelo de cálculo I, observa-se que a intensidade das ações pouco influencia no percentual de redução da área de armadura transversal. Entretanto, observa-se pequena variação nesse percentual em função da classe do concreto considerada na etapa de projeto.

Em relação aos efeitos isolados da torção e aos efeitos combinados de torção e força cortante, apresentam-se as seguintes conclusões:

- Verifica-se que as parcelas relativas à diagonal comprimida do concreto, V_{Rd2} e T_{Rd2} apresentam reduções equivalentes à medida que o ângulo de inclinação da biela diminui, quando comparadas com o ângulo de 45°.
- Em relação às áreas das barras das armaduras transversal e longitudinal oriundas da ação conjunta do momento torçor e da força cortante, verifica-se que à medida que o ângulo da biela diminui de 45° para 30°, ocorre redução da armadura transversal de torção A_{90t} , aumento da armadura longitudinal de torção A_{st} e redução da armadura transversal oriunda da força cortante, A_{sw} .
- Quanto à distribuição percentual da área armadura transversal total (A_{90} e A_{sw}), verifica-se redução no valor das áreas das armaduras à medida que o ângulo θ da biela diminui. Para ângulos de inclinação da biela próximos a 30°, essa redução foi de aproximadamente 63% em relação à área total obtida considerando o ângulo igual a 45°.
- A respeito da distribuição percentual da área de armadura total (A_{90} , A_{sw} e A_{st}), verifica-se aumento no valor final das áreas das armaduras à medida que o ângulo θ da biela diminui, obtendo-se para ângulos θ próximos a 30°, aumento de aproximadamente 19% em relação à área total obtida quando da consideração do ângulo θ igual a 45°.
- Verifica-se que a utilização do modelo de cálculo I para força cortante combinado com os efeitos do momento torçor conduz a maior economia de aço quando comparadas ao modelo de cálculo II.

Por fim, destaca-se que valores elevados para intensidade de força cortante ocorrem com frequência em vigas de transição, e que normalmente apresentam-se acompanhados de valores elevados de momento fletor, o que pode comprometer o dimensionamento das barras da armadura longitudinal da viga. Recomenda-se que, para que uma viga apresente deformações no domínio 3, o valor da força cortante solicitante de cálculo não ultrapasse 40% do valor da capacidade resistente da biela de compressão.

6. Agradecimentos

Os autores agradecem ao Departamento de Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, à CAPES e ao CNPq pela bolsa de doutorado do primeiro autor.

7. Referências bibliográficas

- [01] BRAZILIAN ASSOCIATION OF TECHNICAL STANDARDS. NBR 6118 - Design of concrete structures - Procedure. Rio de Janeiro, ABNT. 2007
- [02] MÖRSCH, E. Teoría y práctica del hormigón armado, versión del alemán, Editorial Gustavo GILI, S.A. Barcelona, Tomo II, 1948, 476 p.
- [03] LEONHARDT, F., MÖNNIG, E. Vorlesungen über massivbau, Berlin.: Springer-Verlag, 1973.(Portuguese version: Construções de concreto – Ed. Interciência. V.3, 1.ed. Rio de Janeiro, 1977).
- [04] MOTA, J, E.; LARANJEIRAS, A. C. R. (2002). Força Cortante – NB1 – Perguntas e Respostas -Lista de discussão eletrônica, comunidade calculistas-ba. Disponível em: <<http://br.groups.yahoo.com/group/calculistas-ba/message/1839?threaded=1&l=1>> Acessos em: 16 set. 2002.
- [05] SAVARIS, G., GARCIA, S. L. G. Determination of the optimum strut and tie angle for designing of beams submitted to simple bending using the directions of the brazilian standard NBR 6118:2003. Proceedings of 49th Brazilian Concrete Conference, CBC-2007, Bento Gonçalves-RS, 2007.
- [06] BARROS, R., GIONGO, J. S. Area Calculation of Transverse Reinforcement in Linear Reinforced Concrete Elements Submitted to Shear Force: Comparative Analysis Based in Models I and II of Brazilian Standard NBR 6118: Proceedings of 50th Brazilian Concrete Conference, CBC-2008, Salvador-BA, 2008.
- [07] COMITE EURO-INTERNACIONAL DU BÉTON. CEB-FIP Model code for concrete structures. Bulletin D'Information, Paris, n. 203-205, July, 1990
- [08] MANGINI, S. Força Cortante – Elementos lineares com armaduras transversais. Os princípios diretivos da proposta do texto de revisão da NB 1. IV Simpósio EPUSP sobre Estruturas de Concreto. São Paulo-SP, 2000.