

# Design of compression reinforcement in reinforced concrete membrane

## *Dimensionamento das armaduras de compressão em chapas de concreto armado*

T. F. SILVA<sup>a</sup>  
tfreitassilva85@gmail.com

J. C. DELLA BELLA<sup>b</sup>  
dbella@usp.br

### Abstract

This paper presents a method to design membrane elements of concrete with orthogonal mesh of reinforcement which are subject to compressive stress. Design methods, in general, define how to quantify the reinforcement necessary to support the tension stress and verify if the compression in concrete is within the strength limit. In case the compression in membrane is excessive, it is possible to use reinforcements subject to compression. However, there is not much information in the literature about how to design reinforcement for these cases. For that, this paper presents a procedure which uses the model based on Baumann's [1] criteria. The strength limits used herein are those recommended by CEB [3], however, a model is proposed in which this limit varies according to the tensile strain which occur perpendicular to compression. This resistance model is based on concepts proposed by Vecchio e Collins [2].

**Keywords:** concrete, design, membrane, compression reinforcement.

### Resumo

Este artigo apresenta métodos de dimensionamento analíticos de armaduras de compressão para chapas de concreto com malha de armadura ortogonal. Os métodos de dimensionamento, em geral, propõem formas para quantificar a armadura necessária para equilibrar os esforços de tração e verificar se a compressão no concreto atende ao limite de resistência. Para os casos em que a compressão na chapa é excessiva, uma das soluções possíveis seria a adoção de armaduras que funcionam comprimidas. Entretanto, não há muita informação na literatura para dimensionamento nestas situações. Assim, é apresentado um procedimento para determinação dessas armaduras que se fundamenta no método baseado nos critérios utilizados por Baumann [1]. Neste trabalho são utilizados como limites de resistência à compressão aqueles recomendados pelo CEB [3], porém, é proposto um modelo em que este limite varia de acordo com a deformação de tração que ocorre perpendicularmente a compressão atuante. Este modelo resistente é baseado nos conceitos propostos por Vecchio e Collins [2].

**Palavras-chave:** concreto armado, dimensionamento, chapas, armaduras de compressão.

<sup>a</sup> Departamento de Engenharia de Estruturas e Geotécnica, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo/EPUSP, tfreitassilva85@gmail.com, Av. Prof. Almeida Prado tv.2, nº 83, Cidade Universitária, São Paulo, Brasil;

<sup>b</sup> Departamento de Engenharia de Estruturas e Geotécnica, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo/EPUSP, dbella@usp.br, Av. Prof. Almeida Prado tv.2, nº83, Cidade Universitária, São Paulo, Brasil.

## 1. Introdução

Em qualquer estrutura de concreto armado, a melhor eficiência da armadura se dá quando ela é posicionada na direção da tensão principal de tração da peça, pois, assim, ela pode absorver diretamente este esforço. Entretanto, no caso das chapas, essa premissa raramente é satisfeita. Para cada combinação de carregamento e em cada ponto da estrutura existe uma direção principal de tração, sendo, portanto, raras as vezes em que é possível determinar um único posicionamento da armadura em que ela estaria na sua condição ótima.

Além disso, as estruturas são normalmente subdivididas em vários elementos de chapa onde as tensões são avaliadas, e assim, seria inadequado construtivamente que as armaduras fossem posicionadas em direções distintas para a região de cada elemento. Normalmente, as armaduras são dispostas na estrutura seguindo um padrão favorável a sua montagem. Este trabalho somente aborda os casos de posicionamento ortogonal da armadura, porque é o caso mais comum e construtivamente mais simples. Por estas razões, a direção das armaduras, em geral, não coincide com a direção principal de tração nas chapas. Devido aos aspectos descritos, o dimensionamento para o ELU, ou seja, a quantificação das armaduras e a verificação da tensão de compressão no concreto nas chapas, não é tarefa trivial. Apesar de complexo, este problema já foi objeto de estudo de vários pesquisadores e há alguns métodos de resolução. Uma das primeiras soluções foi dada por Baumann [3], em 1972. Ele supõe algumas hipóteses que tornam o seu modelo um dos mais simples de se operar.

As soluções propostas para o ELU normalmente abordam casos em que a armadura trabalha tracionada. Outra questão que surge a respeito do dimensionamento de chapas se refere quando a tensão de compressão atuante no concreto é maior que sua tensão limite. As soluções possíveis deste problema passam pelo aumento da resistência característica do concreto, aumento da sua espessura ou adoção de armaduras que ajudem a combater o esforço de compressão. Este trabalho tem como objetivo obter critérios de utilização e dimensionamento para o ELU de chapas com armaduras dispostas ortogonalmente com pelo menos uma das direções das armaduras submetida à compressão, tendo como fundamento o método baseado nos critérios de Baumann [1]. Todas as formulações apresentadas neste artigo se encontram detalhadas em Silva [18].

## 2. Breve histórico sobre o dimensionamento de chapa

Há muito tempo que pesquisadores se debruçam sobre o problema do dimensionamento das chapas. Nielsen [4] propõe um modelo baseado no conceito de membrana fissurada, que consiste em supor que a membrana é um meio contínuo, onde as armaduras resistem apenas a esforços axiais e o concreto é submetido a esforço uniaxial. Baumann [1], em 1972, provavelmente foi o primeiro a elaborar equações que satisfazem tanto o equilíbrio quanto a compatibilidade da chapa. Seu modelo se baseia na premissa que não há tensão de cisalhamento ao longo das fissuras. As soluções alcançadas por Baumann [1] e por Nielsen [4] chegam aos mesmos resultados, porém deduzidas a partir de modelos diferentes.

Gupta [5] utiliza os critérios de Baumann para obter equações que permitam fazer as verificações de dimensionamento para o ELU. Além disso, solucionou o problema de forma a obter a mínima taxa de armadura e a mínima compressão no concreto.

Vecchio e Collins [6] realizaram um experimento no qual trinta painéis de concreto armado com taxas de armadura diferentes nas duas direções foram submetidos a vários tipos de carregamento no plano. Fialkow [7] adapta os critérios propostos no Building Code ACI 318-77 [8] do American Concrete Institute (ACI) para dimensionamento de elementos lineares aos elementos de chapa, levando em consideração não somente a resistência axial da armadura e a resistência à compressão do concreto, mas também a resistência ao cisalhamento tanto oferecida pela armadura quanto pelo concreto. Gupta e Akbar [9], baseado nos experimentos de Peter [10] e de Vecchio e Collins [6], apresentam um modelo com objetivo de não somente dimensionar a chapa, mas também prever seu comportamento quando submetida a um carregamento gradual. A resposta ao carregamento é distinta dependendo de qual etapa o elemento se encontra, sendo possível distinguir quatro etapas. Na primeira, o concreto não está fissurado e as armaduras têm comportamento elástico. Na segunda, o concreto está fissurado e as armaduras nas duas direções têm comportamento elástico. Na terceira, o concreto continua fissurado e as armaduras de uma direção escoam. E, finalmente, na quarta o concreto está fissurado e as armaduras das duas direções escoam.

Na primeira etapa o elemento apresenta comportamento de um meio contínuo em estado plano de tensão. A última etapa se refere ao estado limite último da peça, problema para o qual já havia algumas soluções. Gupta e Akbar [9] apresentam soluções que permitem prever o comportamento da chapa para as etapas intermediárias. Para tanto, utilizam algumas hipóteses simplificadoras do problema como a não existência de tensão de cisalhamento entre as fissuras. Eles mencionam o conceito de rotação das fissuras, no qual a direção das fissuras muda conforme o carregamento aumenta.

Vecchio e Collins [2] propõem o Modified Compression Field Theory (MCFT). Este modelo leva em conta o efeito de "tension-stiffening", pressupõe a existência de tensão de cisalhamento na fissura, mas transmite apenas pelo engrenamento dos agregados e considera também o amolecimento do concreto fissurado. Como tenta se aproximar melhor da realidade introduzindo mais variáveis, é, por consequência, mais complexo, mas alcança resultados satisfatórios.

Atualmente, alguns pesquisadores publicaram trabalhos sobre este assunto, podendo-se citar Chen [11] que compila em seu trabalho alguns dos métodos de dimensionamento supracitados, como aquele baseado nos critérios propostos por Baumann [1], Nielsen [4] e o elaborado por Fialkow [7].

Jazra[12] compara o MCFT com o método baseado nos critérios de Baumann, além de apresentar algumas formulações para dimensionamento de armaduras de compressão para chapas.

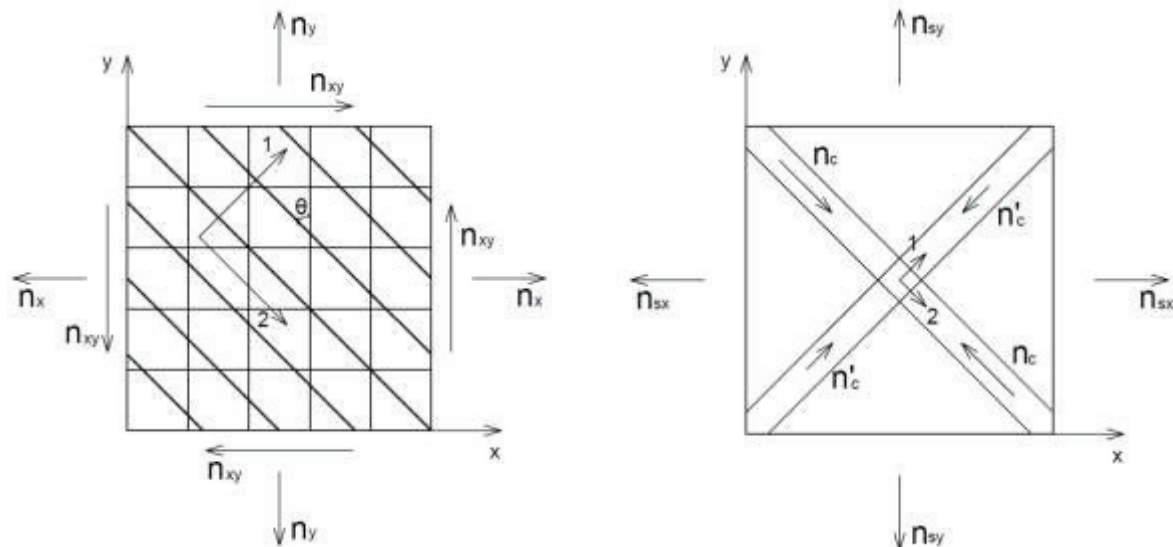
Pereira [17] utiliza as expressões de dimensionamento de chapas para o cálculo de cascas obtendo os esforços solicitantes a partir de um modelo de elementos finitos.

## 3. Método baseado nos critérios de Baumann

O método de dimensionamento baseado nos critérios de Baumann é, provavelmente, o mais simples de ser utilizado em dimensionamento de chapas. Por essa razão, ele foi escolhido para ser a base desse estudo.

Este método em si não apresenta solução para o caso de adoção de armaduras de compressão, mas apoiado nele será proposta

Figura 1 – Esforços na chapa convencionados positivos e eixos considerados neste artigo



uma formulação e critérios de utilização destas armaduras. Jazra [12] compara este método com o MCFT proposto por Vecchio e Collins [2] e chega a resultados que mostram que, comparativamente, o dimensionamento obtido é a favor da segurança. Esta conclusão era esperada, pois a formulação adota algumas hipóteses admitindo este resultado.

Porém, apesar de adequado para dimensionamento para o ELU, ele não obterá a mesma eficácia em prever características para verificação do ELS, como deformação e fissuração.

Ele tem como hipóteses básicas:

1. As fissuras apresentadas pelo elemento são aproximadamente paralelas e retilíneas.
2. A resistência à tração do concreto é desprezada.
3. O efeito de pino das armaduras é desprezado.
4. O efeito de engrenamento dos agregados é desprezado.
5. É considerada perfeita aderência entre a armadura e o concreto.
6. É desconsiderado o efeito devido ao “tension-stiffening”.
7. As direções das deformações principais coincidem com as direções das tensões principais.

Sendo assim, considera-se um elemento de chapa submetido a esforços normais por unidade de comprimento  $n_x$  e  $n_y$  e ao esforço de cisalhamento, também por unidade de comprimento,  $n_{xy}$ , em que as armaduras estão posicionadas na direção dos eixos  $x$  e  $y$ . O ângulo  $\theta$  é aquele formado entre a direção principal de compressão no concreto com a direção  $y$ . Nos casos em que houver fissuração da chapa, este ângulo se refere também àquele formado pelo eixo  $y$  e a fissura, pois, como por hipótese, não há tensão de cisalhamento entre as fissuras, a direção principal de compressão no concreto, eixo 2, é paralela à fissura. Por hipótese, se considera que as direções principais de deformação e de tensão no concreto são coincidentes. Esta composição é ilustrada na Figura 1. É convencionalizado positivo  $n_{sx}$  e  $n_{sy}$  quando de tração e  $n_c$  e  $n'_c$  quando de compressão, sendo  $n'_c$  o esforço de compressão na direção 1 se houver, e  $n_c$  é o esforço de compressão na direção 2.

A Figura 1 apresenta esta convenção.

O problema consiste em, conhecendo os esforços  $n_x$ ,  $n_y$  e  $n_{xy}$ , dimensionar as armaduras  $a_{sx}$  e  $a_{sy}$  e verificar se o concreto resiste à tensão de compressão atuante. Para isto, equacionando o equilíbrio da chapa e a compatibilidade de deformações, a princípio para a situação em que a chapa está submetida a esforços de tração nas direções  $x$  e  $y$ , chegam-se as expressões 1, 2, 3 e 4, onde  $n_{sx}$  e  $n_{sy}$  são os esforços nas armaduras nas direções  $x$  e  $y$ , respectivamente, e  $\epsilon_x$  e  $\epsilon_y$  são as deformações em  $x$  e  $y$  e  $\epsilon_c$  é a deformação no concreto na direção principal de compressão.

$$n_{sx} = n_x + n_{xy} \cdot \text{tg}\theta \quad (1)$$

$$n_{sy} = n_y + n_{xy} \cdot \text{cotg}\theta \quad (2)$$

$$n_c = n_{xy} \cdot (\text{tg}\theta + \text{cotg}\theta) \quad (3)$$

$$\frac{\epsilon_y}{\epsilon_x} = \text{tg}^2\theta \cdot \left[ 1 + \frac{\epsilon_c}{\epsilon_x} \cdot (1 - \text{cotg}^2\theta) \right] \quad (4)$$

A partir destas expressões, é possível demonstrar que a armadura mínima necessária para equilibrar os esforços de tração na chapa se dá quando o ângulo  $\theta$  for igual a  $45^\circ$  para quando a chapa está submetida a esforços de tração em x e y. A demonstração da forma que se alcança estes resultados pode ser encontrada nos trabalhos de Leonhardt e Mönning [13], Chen [11] e Jazra [12].

### 3.1 Casos de dimensionamento

O CEB [3] separa o dimensionamento das chapas em quatro casos. O primeiro deles, caso I, considera as armaduras nas duas direções tracionadas, portanto tanto  $n_{sx}$  quanto  $n_{sy}$  serão positivos. Quando um dos esforços nas armaduras assume valores negativos, ou seja, de compressão, pode-se dispensar o uso de armadura nessa direção. Se não houver esforço de tração na direção x, se aplica o caso II de dimensionamento. Se não houver na direção y, se aplica o caso III. Quando a chapa está completamente comprimida, se recai no caso IV, para o qual não é necessária armadura alguma. Para todos os casos, este método de dimensionamento não contempla a utilização de armaduras de compressão.

#### 3.1.1 Caso I – Armadura e ambas as direções

Para que sejam necessárias as armaduras nas duas direções, as seguintes condições devem ser satisfeitas.

$$n_{sx} = n_x + |n_{xy}| > 0 \quad (5)$$

$$n_{sy} = n_y + |n_{xy}| > 0 \quad (6)$$

Assim, o dimensionamento das armaduras é definido por 7 e 8, onde  $f_{yd}$  é a tensão de cálculo de escoamento do aço.

$$a_{sx} = \frac{n_{sx}}{f_{yd}} = \frac{n_x + |n_{xy}|}{f_{yd}} \quad (7)$$

$$a_{sy} = \frac{n_{sy}}{f_{yd}} = \frac{n_y + |n_{xy}|}{f_{yd}} \quad (8)$$

Para a verificação do concreto no caso I será utilizado o valor de  $f_{cd2}$  sugerido pelo CEB [3] para a resistência à compressão porque, neste caso, o concreto está fissurado. Assim, a expressão é a seguinte.

$$\frac{2|n_{xy}|}{h} = f_{cd2} = 0,6 \left( 1 - \frac{f_{ck}}{250} \right) \cdot f_{cd} \quad (9)$$

#### 3.1.2 Caso II – Armadura somente na direção y

Para que se possa utilizar armadura apenas da direção y, o esforço resistente  $n_{sx}$  deve ser negativo, enquanto  $n_{sy}$  positivo, satisfazendo as expressões seguintes.

$$n_{sx} = n_x + |n_{xy}| \leq 0 \quad (10)$$

$$n_{sy} = n_y + |n_{xy}| > 0 \quad (11)$$

Desta forma, dispensando a armadura na direção x, o ângulo  $\theta$  não será mais  $45^\circ$  conforme comentado, mas será determinado pela equação 12.

$$\theta = \arctg \left( - \frac{n_x}{n_{xy}} \right) \quad (12)$$

Assim, na direção x não haverá armação. A expressão 13 determina a armadura na direção y.

$$a_{sy} = \frac{n_{sy}}{f_{yd}} = \frac{n_y - \frac{n_{xy}^2}{n_x}}{f_{yd}} \quad (13)$$

Na verificação do concreto, se utilizará o  $f_{cd2}$  pelo mesmo motivo apresentado para o caso I, como apresentado pela equação 14:

$$\frac{-n_x - \frac{n_{xy}^2}{n_x}}{h} \leq f_{cd2} = 0,6 \left( 1 - \frac{f_{ck}}{250} \right) \cdot f_{cd} \quad (14)$$

#### 3.1.3 Caso III – Armadura somente na direção

O caso III é semelhante ao caso II, diferenciando apenas a direção da armadura. Então, para que seja necessária armadura apenas na direção x, as seguintes inequações devem ser satisfeitas.

$$n_{sx} = n_x + |n_{xy}| > 0 \quad (15)$$

$$n_{sy} = n_y + |n_{xy}| \leq 0 \quad (16)$$

Da mesma forma, também neste caso, o ângulo  $\theta$  não será mais  $45^\circ$ , mas será determinado pela equação 17.

$$\theta = \arctg \left( -\frac{n_{xy}}{n_y} \right) \quad (17)$$

Neste caso,  $a_{sy}$  é nulo e  $a_{sx}$  é determinado pela equação 18.

$$a_{sx} = \frac{n_{sx}}{f_{yd}} = \frac{n_x - \frac{n_{xy}^2}{n_y}}{f_{yd}} \quad (18)$$

A verificação do concreto é dada pela expressão:

$$\frac{-n_y - \frac{n_{xy}^2}{n_y}}{h} \leq f_{cd2} = 0,6 \left( 1 - \frac{f_{ck}}{250} \right) \cdot f_{cd} \quad (19)$$

**3.14 Caso IV – Dispensa de armaduras nas duas direções**

Para que se possam dispensar as armaduras, não pode haver tensões de tração na peça, portanto as condições de carregamento devem respeitar as seguintes inequações.

$$n_{sx} = n_x + |n_{xy}| \leq 0 \quad (20)$$

$$n_{sy} = n_y + |n_{xy}| \leq 0 \quad (21)$$

Portanto, neste caso, deve-se apenas verificar se a tensão de compressão no concreto é menor que a capacidade resistente. Nesta verificação, diferentemente dos outros casos, será utilizado como valor de referência para resistência do concreto o  $f_{cd1}$  do CEB [3], pois neste caso não há fissuração. Impondo-se equilíbrio na chapa, tem-se que:

$$\left( -\frac{n_x + n_y}{2} + \sqrt{\frac{(n_x - n_y)^2}{4} + n_{xy}^2} \right) \cdot \frac{1}{h} \leq f_{cd1} = 0,85 \cdot \left( 1 - \frac{f_{ck}}{250} \right) \cdot f_{cd} \quad (22)$$

**3.2 Considerações sobre o estudo das armaduras de compressão**

Tendo em mente os casos de dimensionamento propostos pelo CEB [3] apresentados, pode-se analisar em quais deles é coerente estudar armaduras de compressão.

Primeiramente, para o caso I, armaduras de compressão só poderiam ser utilizadas com eficácia se fossem dispostas na direção das fissuras, onde ajudariam a reduzir a tensão de compressão no concreto. Entretanto, como neste caso já há uma malha ortogonal de armaduras, a colocação de mais uma camada de barras em outra direção tornaria a solução construtivamente ruim, somente aconselhável em casos de peças especiais.

Outra possibilidade seria superdimensionar a chapa, ou seja, colocar maior quantidade de armadura de forma a limitar a deformação de compressão e, consequentemente, diminuir a tensão na direção principal. Entretanto, essa solução levaria a uma ruptura frágil da peça, já que o concreto romperia antes das armaduras escoarem. Para os casos II e III, é razoável pensar que ao se colocar armadura na direção que a priori não foi armada, ela afetará a distribuição de tensões da chapa de forma a diminuir a tensão de compressão no concreto.

Já para o caso IV, onde não há armadura alguma, é evidente que, ao se dispor barras de forma adequada nessa chapa, ela ajudará a combater os esforços de compressão.

Portanto, neste artigo somente serão abordados os casos II, III e IV de dimensionamento.

**4. Modelo resistente e verificação da tensão de compressão no concreto**

No método baseado nos critério de Baumann apresentado, os valores de resistência do concreto seguem aqueles recomendados pelo CEB [3]. Entretanto, o uso destes valores no dimensionamento das chapas impõe uma descontinuidade entre o caso em que o concreto está fissurado e aquele em que o concreto está intacto. Isto posto, neste trabalho será adotado um modelo resistente para o concreto que otimize o uso do material. Para tanto, se deseja encontrar valores de resistência para o concreto que estejam entre  $f_{cd1}$  e  $f_{cd2}$  tendo como parâmetro a deformação de tração que ocorre perpendicular à compressão atuante.

Vecchio e Collins [2] propõem uma formulação que contempla o amolecimento do concreto devido à sua fissuração de forma diferente da do CEB [3]. Para eles a perda de resistência do concreto fissurado está relacionada com a deformação na direção principal de tração  $\epsilon_1$  imposta na região em questão. As equações 23 e 24 definem o diagrama tensão-deformação para a compressão no concreto proposto por Vecchio e Collins [2]. Considerando que o valor da deformação que leva a tensão de pico no concreto,  $\epsilon'_c$ , vale 2‰, obtém-se a equação 24. A Figura 2 ilustra este modelo.

**Figura 2 – Diagrama tensão-deformação para o concreto fissurado em compressão (Vecchio e Collins, 1986)**

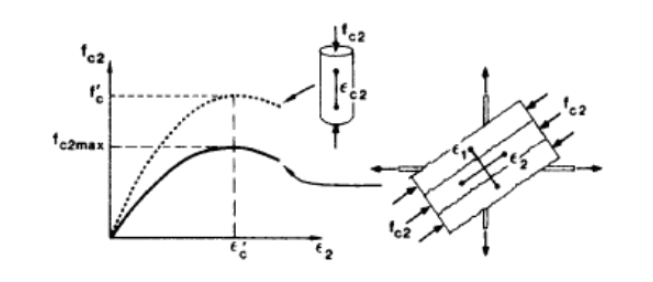
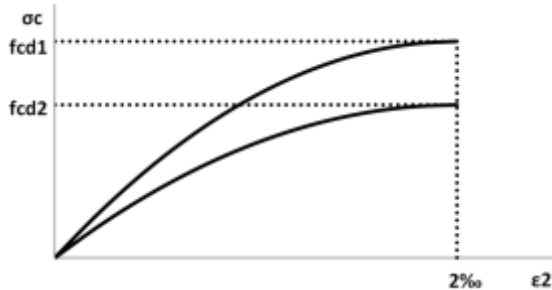




Figura 3 – Diagrama tensão-deformação adotado



$$f_{c2} = f_{c2max} \left[ 2 \cdot \left( \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_c} \right) - \left( \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_c} \right)^2 \right] \quad (23)$$

$$f_{c2max} = \frac{f_c}{0,8 + 170 \cdot \varepsilon_1} \leq f_c \quad (24)$$

A expressão 23 é semelhante àquela sugerida pelo CEB [3] para o diagrama tensão-deformação do concreto, mudando apenas o limite de resistência. Neste artigo, se usará os limites propostos pelo CEB [3], porém interpolados pela equação 24. Desta forma, tem-se que:

$$\sigma_c = f_{c2max} \left[ 2 \cdot \left( \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_c} \right) - \left( \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_c} \right)^2 \right] \quad (25)$$

$$f_{cd2} \leq f_{c2max} = \frac{f_{cd1}}{0,8 + 170 \cdot \varepsilon_1} \leq f_{cd1} \quad (26)$$

O limite de deformação adotado neste trabalho será o mesmo sugerido pelo CEB [3] para peças submetidas a esforços axiais, sendo que este limite é de 2‰. Assim, a Figura 3, apresenta o diagrama tensão-deformação adotado neste trabalho.

#### 4.1 Verificação da resistência à compressão do concreto

Como neste trabalho o limite de resistência para o concreto é calculado levando em conta as considerações apresentadas no item 4, a forma de verificar se o esforço de compressão atende esse limite é diferente daquela apresentada no método baseado nos critérios de Baumann, pois a capacidade resistente do concreto

agora depende da deformação de tração para a qual a chapa está submetida no ELU.

Para o caso IV, a verificação do concreto é feita da mesma forma que apresentada no item 3, pois neste caso não há tração na chapa e a resistência à compressão do concreto é dada sempre por  $f_{cd1}$ . Já para os casos II e III, primeiramente deve-se verificar se:

$$\sigma_c = \frac{n_c}{h} \geq f_{cd1} \quad (27)$$

Como se admite neste estudo que  $f_{cd1}$  é o limite máximo para a resistência do concreto à compressão em qualquer caso, se a inequação 27 for satisfeita, conclui-se que a tensão de compressão no concreto está acima do limite e, sendo assim, deve-se avaliar a possibilidade do uso de armaduras de compressão. A forma de se fazer esta avaliação será apresentada posteriormente no item 5. Para o caso em que a inequação 27 não for satisfeita deve-se então verificar se:

$$\sigma_c = \frac{n_c}{h} \leq f_{cd2} \quad (28)$$

Como  $f_{cd2}$  é o limite inferior para a resistência à compressão do concreto, se a expressão 28 for satisfeita conclui-se que a tensão de compressão no concreto atende ao limite de resistência imposto e, portanto, não será necessário o uso de armaduras de compressão. Se as inequações 27 e 28 não forem satisfeitas, por consequência, tem-se que:

$$f_{cd2} \leq \frac{n_c}{h} \leq f_{cd1} \quad (29)$$

Neste caso, deve se analisar as deformações na chapa para determinar o limite de resistência a ser utilizado, pois ele dependerá de  $\varepsilon_x$ .

##### 4.1.1 Cálculo para determinação do limite de resistência a compressão do concreto

Neste item tem-se como objetivo encontrar o valor de  $f_{cd2max}$ . Porém, ele depende da deformação da chapa. Será apresentada uma forma de cálculo baseada naquela apresentada por Jazra [12]. Este cálculo é válido para os casos II e III. Como eles são análogos tendo como diferença apenas o posicionamento da armadura (eixo y para caso II e eixo x para caso III), será descrito somente aquele para o caso III, sendo que para o caso II será necessário substituir a equação 30 pela equivalente para  $\varepsilon_y$  e repetir a mesmo processo. Sendo assim, do círculo de Mohr, tem-se que:

$$\varepsilon_x = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} + \left( \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2} \right) \cdot \cos 2\theta \quad (30)$$

Assim:

$$\varepsilon_1 = \frac{2 \cdot \varepsilon_x - \varepsilon_2 \cdot (1 - \cos 2\theta)}{(1 + \cos 2\theta)} \quad (31)$$

Então:

$$f_{c2max} = \frac{f_{cd1}}{0,8 + 170 \cdot \left[ \frac{2 \cdot \varepsilon_x - \varepsilon_2 \cdot (1 - \cos 2\theta)}{(1 + \cos 2\theta)} \right]} \quad (32)$$

A partir da equação 25 é possível expressar a deformação de compressão em função da resistência:

$$\varepsilon_2 = \varepsilon'_c \cdot \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{f}{f_{c2max}}} \right) \quad (33)$$

Considerando que, por hipótese,  $\varepsilon_x$  é igual à deformação de escoamento do aço, tem-se que:

$$\varepsilon_2 = \varepsilon'_c \cdot \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{\frac{\sigma_c}{f_{cd1}}}{0,8 + 170 \cdot \left[ \frac{2 \cdot \varepsilon_{yd} - \varepsilon_2 \cdot (1 - \cos 2\theta)}{(1 + \cos 2\theta)} \right]}} \right) \quad (34)$$

Para o caso II, a equação 34 se modifica e resulta na expressão 35:

$$\varepsilon_2 = \varepsilon'_c \cdot \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{\frac{\sigma_c}{f_{cd1}}}{0,8 + 170 \cdot \left[ \frac{2 \cdot \varepsilon_{yd} - \varepsilon_2 \cdot (1 - \cos 2\theta)}{(1 - \cos 2\theta)} \right]}} \right) \quad (35)$$

As equações 34 e 35 são solucionáveis por métodos iterativos. Arbitrando-se um valor inicial para  $\varepsilon_2$  para o qual a função exista, ou seja, de forma que o radicando não seja negativo, ela irá convergir para a solução do problema. Se em uma iteração o radicando assumir valor negativo, então a problema não tem solução e, portanto, a tensão no concreto está superior ao limite máximo.

## 5. Dimensionamento das armaduras de compressão para os casos II e III

Todas as demonstrações deste item serão feitas apenas para o caso III de dimensionamento. O caso II é análogo e somente será apresentada a sua formulação final.

Sendo assim, para os casos em que a tensão de compressão no concreto é maior que a sua resistência calculada conforme apresentado no item 4, deseja-se saber se é possível que a coloca-

ção de armaduras que funcionem a compressão na direção que previamente estava sem elas diminua a tensão no concreto de forma que ela fique menor ou igual a resistência. Primeiramente, serão pressupostas para este problema as mesmas hipóteses dadas pelo método baseado nos critérios de Baumann apresentadas no item 3.

Além disso, algumas considerações sobre as deformações devem ser feitas. Primeiramente, será admitido que a deformação na direção x é igual à deformação de escoamento da armadura de tração. Esta hipótese restringe a deformação na chapa, otimizando a resistência à compressão do concreto, além de resultar em uma área de armadura para a qual a chapa no ELU sofre ruptura dúctil. Em outras palavras, mesmo que para solucionar o problema seja necessário superarmar a chapa, este resultado será descartado, pois desta forma a chapa romperia de forma frágil.

Além disso, será considerado que a deformação  $\varepsilon_2$  é sempre igual a  $\varepsilon'_c$ , levando o concreto ao seu limite de resistência e, por consequência, reduzindo o consumo de armaduras. Resumindo as hipóteses, tem-se que:

1. As fissuras apresentadas pelo elemento são aproximadamente paralelas e retilíneas.
2. A resistência à tração do concreto é desprezada.
3. O efeito de pino das armaduras é desprezado.
4. O efeito de engrenamento dos agregados é desprezado.
5. É considerada perfeita aderência entre a armadura e o concreto.
6. É desconsiderado o efeito devido ao "tension-stiffening".
7. A direção das deformações principais coincide com a direção das tensões principais.
8. A deformação na direção x é igual à deformação de escoamento da armadura de tração ( $\varepsilon_x = \varepsilon_{yd}$ ).
9. A deformação na direção principal de compressão é igual à deformação que resulta na tensão de pico do concreto ( $\varepsilon_2 = \varepsilon'_c$ ).

### 5.1 Limites de dimensionamento

Dadas as hipóteses apresentadas, pretende-se determinar os casos em que é possível dimensionar as armaduras de compressão. Assim, primeiramente, dada uma chapa que está submetida a esforços tais que se pode dispensar o uso de armaduras de tração na direção y, portanto está no caso de dimensionamento III, e que a tensão de compressão no concreto é maior que o a resistência  $f_{c2max}$ , conforme apresentado no item 4. Como por hipótese  $\varepsilon_x = \varepsilon_{yd}$  e  $\varepsilon_2 = \varepsilon'_c$ , a resistência à compressão do concreto é dada pela equação 36.

$$f_{c2max} = \frac{f_{cd1}}{0,8 + 170 \cdot \left[ \frac{2 \cdot \varepsilon_{yd} - \varepsilon'_c \cdot (1 - \cos 2\theta)}{(1 + \cos 2\theta)} \right]} \quad (36)$$

Em que:

$$f_{cd2} \leq f_{c2max} \leq f_{cd1}$$

O gráfico que descreve a resistência em função de  $\theta$  é apresentado na Figura 4. Para o caso III, todas as funções de  $\theta$  tem domínio de  $0 \leq \theta \leq |45^\circ|$ . Para o caso II de dimensionamento  $|45^\circ| \leq \theta \leq |90^\circ|$ .

Podem-se determinar os valores de  $\theta_1$  e  $\theta_2$  apresentados na Fi-

**Figura 4 – Resistência à compressão do concreto em função de  $\theta$  para o caso III**

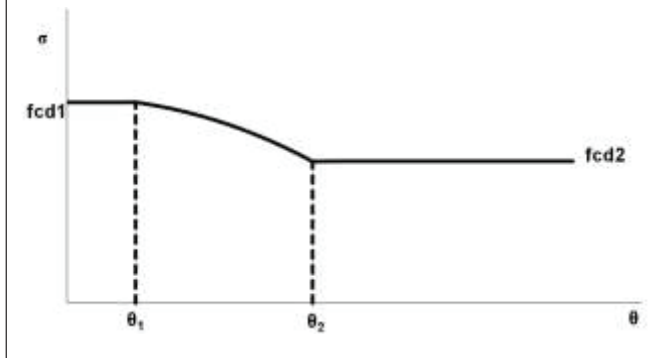


Figura 4. O ângulo  $\theta_1$  é aquele que iguala  $f_{c2max}$  a  $f_{cd1}$ . Desta forma é possível demonstrar que:

$$\theta_1 = \frac{\arccos\left(\frac{0,00118 - 2 \cdot \varepsilon_{yd} + \varepsilon'_c}{\varepsilon'_c - 0,00118}\right)}{2} \quad (37)$$

Como a função cosseno produz o mesmo resultado não importa o sinal do ângulo, tanto  $\theta_1$  positivo como negativo são soluções. De forma análoga,  $\theta_2$  é o valor que iguala  $f_{c2max}$  com  $f_{cd2}$ . Assim, tem-se que:

$$\theta_2 = \frac{\arccos\left(\frac{0,003627 - 2 \cdot \varepsilon_{yd} + \varepsilon'_c}{\varepsilon'_c - 0,003627}\right)}{2} \quad (38)$$

Também para  $\theta_2$ , tanto a solução positiva quanto negativa satisfazem a equação 38.

Porém, se  $\theta$  ultrapassar certo limite, a deformação  $\varepsilon_y$  assume valores positivos. Desta forma, a área de armadura em y resulta em valores negativos, o que não é fisicamente possível. Dado que por hipótese  $\varepsilon_x = \varepsilon_{yd}$  e que  $\varepsilon_2 = \varepsilon'_c$ , pode-se calcular para quais valores de  $\theta$   $\varepsilon_y$  é menor que 0. Deseja-se então encontrar  $\theta^*$  para o qual  $\varepsilon_y = 0$ . Do círculo de Mohr, tem-se que:

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon_x + \varepsilon_y \quad (39)$$

Então:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_{yd} - \varepsilon'_c \quad (40)$$

Também através do círculo de Mohr, já substituindo  $\theta$  por  $\theta^*$ , tem-se que:

$$\varepsilon_x = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} + \left(\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2}\right) \cdot \cos 2\theta^* \quad (41)$$

Substituindo 40 em 41, chega-se que:

$$\theta^* = \frac{\arccos\left(\frac{\varepsilon_{yd}}{\varepsilon_{yd} - 2 \cdot \varepsilon'_c}\right)}{2} \quad (42)$$

A Tabela 1 apresenta os valores de  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  e  $\theta^*$  para os aços determinados pela NBR 6118 [14]. Pode-se observar que para os aços CA-50 e CA-60 não existem valores de  $\theta_1$ . Isto acontece porque para os valores de deformação assumidos por hipótese para este problema, a resistência do concreto nunca atinge o valor de  $f_{cd1}$  para estes aços. Assim, a resistência do concreto atinge seu máximo para quando  $\theta = 0^\circ$ . Isto posto, igualando a solicitação com resistência, tem-se que se  $\theta_1$  existe e  $\theta = 0$ , então  $n_{xy} = 0$  e:

$$f_{cd1} = \frac{n_c}{h} \quad (43)$$

Se  $\theta_1$  existe e  $0 < \theta \leq |\theta_1|$ , então:

$$f_{cd1} = \frac{2 \cdot n_{xy}}{h \cdot \sin(2\theta)} \quad (44)$$

Se  $\theta_1$  não existe e  $\theta = 0$ , então  $n_{xy} = 0$  e:

$$\frac{f_{cd1}}{0,8 + 170 \cdot \left[\frac{2 \cdot \varepsilon_{yd} - \varepsilon'_c \cdot (1 - \cos 2\theta)}{(1 + \cos 2\theta)}\right]} = \frac{n_c}{h} \quad (45)$$

Se  $\theta_1$  existe e  $|\theta_1| < \theta < |\theta_2|$  ou se  $\theta_1$  não existe e  $0 < \theta < |\theta_2|$ , então:

$$\frac{f_{cd1}}{0,8 + 170 \cdot \left[\frac{2 \cdot \varepsilon_{yd} - \varepsilon'_c \cdot (1 - \cos 2\theta)}{(1 + \cos 2\theta)}\right]} = \frac{2 \cdot n_{xy}}{h \cdot \sin(2\theta)} \quad (46)$$

**Tabela 1 – Valores de  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  e  $\theta^*$  para os aços prescritos pela NBR 6118 para o caso III**

	$\varepsilon_{yd}$ (‰)	$ \theta_1 $ (°)	$ \theta_2 $ (°)	$ \theta^* $ (°)
CA-25	1,04	12,17	42,74	39,07
CA-50	2,07	NÃO EXISTE	31,74	35,03
CA-60	2,48	NÃO EXISTE	26,79	33,74



Tabela 2 – Valores máximos para  $\theta_{max}$  para o caso III

	$\epsilon_{yd}$ (‰)	$\theta_{max}$ (°)
CA-25	1,04	33,76
CA-50	2,07	35,03
CA-60	2,48	33,74

E, finalmente, se  $|\theta_2| \leq \theta < |\theta^*|$ , então:

$$f_{cd2} = \frac{2 \cdot n_{xy}}{h \cdot \text{sen}(2\theta)} \quad (47)$$

Dado este quadro, deseja-se saber para quais valores de esforços é possível dimensionar as armaduras de compressão. Para os esforços normais, não há limite matemático, havendo somente limite para a taxa de armadura prescrita pela NBR 6118 [14]. Já para o esforço de cisalhamento existe um limite cuja formulação varia de acordo com o tipo de aço adotado. Isto acontece porque os limites  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  e  $\theta^*$  são diferentes para cada aço. Para CA-25, como  $|\theta^*| < |\theta_2|$ , a equação 47 nunca será válida. Deseja-se saber qual o máximo valor que  $n_{xy}$  pode assumir para este aço. Então, retomando a equação 46 é possível demonstrar que:

$$|n_{xy}| \leq \frac{f_{cd1} \cdot h}{2} \cdot \left( \frac{\text{sen}(2 \cdot |\theta_{xy}|)}{0,8 + 170 \cdot \left[ \frac{2 \cdot \epsilon_{yd} - \epsilon'_c \cdot (1 - \cos(2 \cdot |\theta_{xy}|))}{(1 + \cos(2 \cdot |\theta_{xy}|))} \right]} \right) \quad (48)$$

Em que:

$$|\theta_{xy}| = 33,76^\circ \quad (49)$$

Para CA-50 e CA-60, como  $|\theta^*| > |\theta_2|$ , então a equação 47 é válida. A partir dela, é possível demonstrar que:

$$|n_{xy}| \leq \frac{f_{cd2} \cdot h \cdot \text{sen}(2|\theta^*|)}{2} \quad (50)$$

Portanto, se  $n_{xy}$  respeitar a condição imposta por 48 ou 50, o problema sempre tem solução, ou seja, existe uma armadura que fará com que a tensão no concreto diminua até a sua resistência máxima. A Tabela 2 apresenta os valores de  $\theta$  máximo para cada tipo de aço.

### 5.2 Dimensionamento das armaduras para o caso III

Dada uma chapa que está submetida a esforços tais que respeitem

as condições impostas pelas equações 48 ou 50, pretende-se calcular a quantidade de armadura necessária a ser posicionada na direção y de forma que a tensão de compressão no concreto seja igual à resistência máxima  $f_{c2max}$ . Este método de cálculo foi baseado naquele apresentado por Jazra [12]. Sendo assim, retomando as equações 43, 44, 45, 46 e 47 deseja-se encontrar o valor de  $\theta$  que é solução do problema. Primeiramente, se  $n_{xy} = 0$ , então  $\theta = 0^\circ$ . Se  $\theta_1$  existe e  $0 < \theta \leq |\theta_1|$ , então:

$$\theta = \frac{\arcsen\left(\frac{2 \cdot n_{xy}}{f_{cd1} \cdot h}\right)}{2} \quad (51)$$

Se  $\theta_1$  existe e  $|\theta_1| < \theta < |\theta_2|$  ou se  $\theta_1$  não existe e  $0^\circ < \theta < |\theta_2|$ , então:

$$\theta = \frac{\arcsen\left(\frac{\frac{2 \cdot n_{xy}}{f_{cd1} \cdot h}}{0,8 + 170 \cdot \left[ \frac{2 \cdot \epsilon_{yd} - \epsilon'_c \cdot (1 - \cos(2\theta))}{(1 + \cos(2\theta))} \right]}\right)}{2} \quad (52)$$

E, finalmente, se  $|\theta_2| \leq \theta < |\theta^*|$ , então:

$$\theta = \frac{\arcsen\left(\frac{2 \cdot n_{xy}}{f_{cd2} \cdot h}\right)}{2} \quad (53)$$

1. Se  $n_{xy} = 0$ ,  $\theta = 0$ .
  2. Se  $n_{xy} \neq 0$ , utilizar método iterativo para achar  $\theta$  através da equação 52.
  3. Se convergir, para aço CA-25, podem ser encontradas duas soluções, porém só é válida aquela em que  $\theta < \theta_{max}$ .
  4. Se convergir, para aço CA-25, verificar se  $\theta \leq \theta_1$ . Como a equação 52 não é válida para este domínio, em caso positivo, deve-se encontrar  $\theta$  através da equação 51.
  5. Se convergir para CA-50 ou CA-60,  $\theta$  encontrado é solução.
  6. Se não convergir, encontrar a solução através da equação 53.
- Com os valores de  $\epsilon_x = \epsilon_{yd}$ ,  $\epsilon_2 = \epsilon'_c$  e  $\theta$ , pode-se então obter o valor de  $\epsilon_1$  e  $\epsilon_y$ . Retomando a equação 31 e 39, chega-se que:

$$\epsilon_y = \frac{2 \cdot \epsilon_{yd} - \epsilon'_c \cdot (1 - \cos(2\theta))}{(1 + \cos(2\theta))} + \epsilon'_c - \epsilon_{yd} \quad (54)$$

Calculam-se as forças nas armaduras através das equações 1 e 2. As armaduras são dadas por:

$$a_{sx} = \frac{n_{sx}}{\sigma_x} = \frac{n_{sx}}{E_{cs} \cdot \epsilon_x} = \frac{n_{sx}}{E \cdot \epsilon_{yd}} = \frac{n_{sx}}{f_{yd}} \quad (55)$$

$$a_{sy} = \frac{n_{sy}}{\sigma_y} = \frac{n_{sy}}{E_{cs} \cdot \varepsilon_y} \quad (56)$$

### 5.3 Dimensionamento das armaduras para o caso II

Neste item será apresentada a formulação para o dimensionamento das armaduras de compressão para o caso II. Conforme já exposto, a demonstração das fórmulas é a mesma para o caso III e aqui serão apresentadas apenas as equações finais. Sendo assim, para o caso II também se deve respeitar os limites de dimensionamento apresentado no item 5.1, porém o domínio das funções de  $\theta$  é  $|45^\circ| \leq \theta \leq |90^\circ|$ . Assim, como agora  $\varepsilon_y = \varepsilon_{yd}$ , adaptando a expressão 36,  $f_{c2max}$  é representado pela equação 57.

$$f_{c2max} = \frac{f_{cd1}}{0,8 + 170 \cdot \left[ \frac{2 \cdot \varepsilon_{yd} - \varepsilon'_c \cdot (1 + \cos 2\theta)}{(1 - \cos 2\theta)} \right]} \quad (57)$$

Assim, para o caso II, os limites de  $\theta$  assumem os valores apresentados na Tabela 3. Para CA-25, tem-se que:

$$|n_{xy}| \leq \frac{f_{cd1} \cdot h}{2} \cdot \left( \frac{\sin(2 \cdot |\theta_{max}|)}{0,8 + 170 \cdot \left[ \frac{2 \cdot \varepsilon_{yd} - \varepsilon'_c \cdot (1 + \cos(2 \cdot |\theta_{max}|))}{(1 - \cos(2 \cdot |\theta_{max}|))} \right]} \right) \quad (58)$$

Para CA-50 e CA-60, tem-se que:

$$|n_{xy}| \leq \frac{f_{cd2} \cdot h \cdot \sin(2|\theta_{max}|)}{2} \quad (59)$$

Se caso o esforço de cisalhamento para o qual a chapa está submetida respeitar a condição 58 ou 59, então se deve encontrar o valor de  $\theta$  utilizando o mesmo roteiro que aquele para o caso III, porém utilizando a formulação encontrada neste item. Primeiramente, se  $n_{xy} = 0$ , então  $\theta = 90^\circ$ . Se  $\theta_1$  existe e  $|\theta_1| \leq \theta < 90^\circ$ , então:

$$\theta = \frac{\arcsen\left(\frac{2 \cdot n_{xy}}{f_{cd1} \cdot h}\right)}{2} \quad (60)$$

**Tabela 3 – Valores de  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ ,  $\theta^*$  e  $\theta_{max}$  para os aços prescritos pela NBR 6118 para o caso II**

	$\varepsilon_{yd}$ (‰)	$ \theta_1 $ (°)	$ \theta_2 $ (°)	$ \theta^* $ (°)	$\theta_{max}$ (°)
CA-25	1,04	77,83	47,26	50,93	56,24
CA-50	2,07	NÃO EXISTE	58,26	54,97	54,97
CA-60	2,48	NÃO EXISTE	63,21	56,26	56,26

Se  $\theta_1$  existe e  $|\theta_2| < \theta < |\theta_1|$  ou se  $\theta_1$  não existe e  $|\theta_2| < \theta < 90^\circ$ , então:

$$\theta = \frac{\arcsen\left(\frac{\frac{2 \cdot n_{xy}}{f_{cd1} \cdot h}}{0,8 + 170 \cdot \left[ \frac{2 \cdot \varepsilon_{yd} - \varepsilon'_c \cdot (1 + \cos 2\theta)}{(1 - \cos 2\theta)} \right]}\right)}{2} \quad (61)$$

E, finalmente, se  $|\theta^*| < \theta \leq |\theta_2|$ , então:

$$\theta = \frac{\arcsen\left(\frac{2 \cdot n_{xy}}{f_{cd2} \cdot h}\right)}{2} \quad (62)$$

Para o caso II, agora  $\varepsilon_y = \varepsilon_{yd}$ . Assim, com  $\varepsilon_x = \varepsilon'_c$  e  $\theta$ , é possível encontrar o valor de  $\varepsilon_1$  e então de  $\varepsilon_x$ . Desta forma, tem-se que:

$$\varepsilon_x = \frac{2 \cdot \varepsilon_{yd} - \varepsilon'_c \cdot (1 + \cos 2\theta)}{(1 - \cos 2\theta)} + \varepsilon'_c - \varepsilon_{yd} \quad (63)$$

Calculam-se as forças nas armaduras através das equações 64 e 65. As armaduras são dadas por:

$$a_{sx} = \frac{n_{sx}}{\sigma_x} = \frac{n_{sx}}{E \cdot \varepsilon_x} \quad (64)$$

$$a_{sy} = \frac{n_{sy}}{\sigma_y} = \frac{n_{sy}}{E \cdot \varepsilon_y} = \frac{n_{sy}}{E \cdot \varepsilon_{yd}} = \frac{n_{sy}}{f_{yd}} \quad (65)$$

## 6. Dimensionamento das armaduras de compressão para o caso IV

O caso IV difere dos casos II e III apresentados até aqui porque ele não tem a mesma problemática para a consideração da resistência do concreto. Como neste caso a chapa está em estado biaxial de compressão, a resistência do concreto poderia ser até maior que o valor de  $f_{cd1}$ , conforme recomendação do CEB [3]. Entretanto, para este estudo e a favor da segurança a resistência do concreto a ser considerada será igual  $f_{cd1}$ . A formulação a ser apresentada tem como objetivo dimensionar armaduras nas direções x e y para chapas em que o concreto não atende ao critério de resistência.

Primeiramente, admite-se que o concreto estará em seu limite de tensão no ELU. Outra hipótese do problema é que a chapa está sempre em estado de compressão biaxial, ou seja, a inclusão de armaduras que levem ao surgimento de trações na chapa é um caso que não está contemplado pela formulação deste estudo. Assim, tem-se como hipóteses.

1. A resistência à tração do concreto é desprezada
2. É considerada perfeita aderência entre a armadura e o concreto
3. A chapa sempre está em estado biaxial de compressão.
4. A direção das deformações principais coincide com a direção das tensões principais
5. A resistência do concreto à compressão é dada por  $f_{cd1}$ .
6. A deformação na direção principal de maior compressão é igual à deformação que resulta na tensão de pico do concreto ( $\epsilon_2 = \epsilon'_c$ ). Assim, a maior tensão de compressão é igual à resistência do concreto à compressão ( $\sigma_c = f_{cd1}$ ).

Efetuada-se o equilíbrio da chapa, chegam-se as seguintes expressões onde  $n'_c$  é a força na direção de menor compressão na chapa.

$$n_c = -n_x + n_{xy} \cdot \cotg\theta + n_{sx} \quad (66)$$

$$n_c = n_{sy} - n_y + n_{xy} \cdot \tg\theta \quad (67)$$

$$n_c = n'_c + n_{xy} \cdot (\tg\theta + \cotg\theta) \quad (68)$$

$$n_c = -\frac{(n_x - n_{sx}) + (n_y - n_{sy})}{2} + \sqrt{\frac{((n_x - n_{sx}) - (n_y - n_{sy}))^2}{4} + n_{xy}^2} \quad (69)$$

$$n'_c = -\frac{(n_x - n_{sx}) + (n_y - n_{sy})}{2} - \sqrt{\frac{((n_x - n_{sx}) - (n_y - n_{sy}))^2}{4} + n_{xy}^2} \quad (70)$$

### 6.1 Limites de dimensionamento

Pretende-se definir os casos para os quais é possível dimensionar armaduras de compressão. Dado por hipótese que a chapa sempre está em estado biaxial de compressão, pode-se inferir que  $n'_c \geq 0$ . Assim, a partir da equação 68, tem-se que:

$$\text{sen}2\theta \geq \frac{2 \cdot n_{xy}}{n_c} \quad (71)$$

Então:

$$|n_{xy}| \leq \frac{f_{cd1} \cdot h}{2} \quad (72)$$

A equação 72 expressa um limite absoluto para  $n_{xy}$ . Isto posto, como as hipóteses definem apenas uma deformação fixa, conseqüentemente há infinitas soluções dentro de um intervalo. O parâmetro que define este intervalo será  $\theta$ . Assim, é interessante delimitar quais os ângulos  $\theta$  que são possíveis de serem atribuídos ao problema. Desta forma, retomando a equação 71, é possível demonstrar que:

$$\theta_{c1} \leq \theta \leq \theta_{c2} \quad (73)$$

Em que:

$$\theta_{c1} = \frac{\arcsen\left(\frac{2 \cdot n_{xy}}{f_{cd1} \cdot h}\right)}{2} \text{ to } 0^\circ \leq \theta \leq |45^\circ| \quad (74)$$

$$\theta_{c2} = \frac{\arcsen\left(\frac{2 \cdot n_{xy}}{f_{cd1} \cdot h}\right)}{2} \text{ to } |45^\circ| \leq \theta \leq |90^\circ| \quad (75)$$

Isto posto, além deste critério, como por hipótese a chapa sempre está em estado biaxial de tensão, as deformações em qualquer direção sempre tem sinal negativo. Desta forma, para não se obter armaduras com sinal negativo, o que é uma incongruência, as forças nas armaduras devem ser negativas também. Sendo assim, para que  $n_{sx} \leq 0$ ,  $\theta$  deve respeitar a seguinte premissa.

$$\theta \leq \theta_x = \arctg\left(\frac{n_{xy}}{n_x + n_c}\right) \quad (76)$$

De maneira análoga, para que  $n_{sy} \leq 0$ , o seguinte critério deve ser seguido.

$$\theta \geq \theta_y = \arctg\left(\frac{n_c + n_y}{n_{xy}}\right) \quad (77)$$

### 6.2 Dimensionamento das armaduras

O método a ser apresentado foi baseado naquele de Jazra [12]. Primeiramente, os esforços para o qual chapa está submetida devem respeitar a equação 69. Depois de verificado este critério, deve-se arbitrar um valor de  $\theta$  tal que respeite os limites impostos pelas inequações 73, 76 e 77. Dos infinitos  $\theta$  possíveis, um valor resultará na armadura mínima. Com isto, calcula-se:

$$n_{sx} = n_c + n_x - n_{xy} \cdot \cotg\theta \quad (78)$$

$$n_{sy} = n_c + n_y - n_{xy} \cdot \operatorname{tg} \theta \quad (79)$$

Com os valores de  $n_{sx}$  e  $n_{sy}$ , é possível calcular o valor de  $n'_c$  através da expressão 70.

Como a direção principal das tensões é a mesma das deformações por hipótese, o esforço  $n'_c$  produz a deformação  $\varepsilon_1$ . Estes termos se relacionam através do modelo constitutivo para o concreto. Portanto:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon'_c \cdot \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{n'_c}{f_{cd1} \cdot h}} \right) \quad (80)$$

Obtendo o valor de  $\varepsilon_1$ , como se conhece o valor de  $\varepsilon_2 = \varepsilon'_c$  e  $\theta$ , pode-se calcular os valores das deformações  $\varepsilon_x$  e  $\varepsilon_y$  através das expressões 81 e 82, obtidas pelo círculo de Mohr.

$$\varepsilon_x = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} + \left( \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2} \right) \cdot \cos 2\theta \quad (81)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} - \left( \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2} \right) \cdot \cos 2\theta \quad (82)$$

Com isto, dimensionam-se as armaduras:

$$a_{sx} = \frac{n_{sx}}{\sigma_x} = \frac{n_{sx}}{E_{cs} \cdot \varepsilon_x}$$

$$a_{sy} = \frac{n_{sy}}{\sigma_y} = \frac{n_{sy}}{E_{cs} \cdot \varepsilon_y}$$

As armaduras dimensionadas não são necessariamente as mínimas. Portanto, devem-se realizar tentativas para encontrar este mínimo.

## 7. Exemplo de dimensionamento

Dado uma chapa com espessura de 12 cm,  $f_{ck}$  igual a 25 MPa, CA-50 e submetida a esforços por unidade de comprimento como mostrados na Figura 5.

Primeiramente, verifica-se que caso de dimensionamento se aplica para esta chapa calculando os esforços  $n_{sx}$  e  $n_{sy}$  através das expressões 83 e 84.

$$n_{sx} = n_x + |n_{xy}| \quad (83)$$

$$n_{sy} = n_y + |n_{xy}| \quad (84)$$

Então:

$$n_{sx} = n_x + |n_{xy}| = 320 + |200| = 500 \text{ kN/m}$$

$$n_{sy} = n_y + |n_{xy}| = -2000 + |200| = -1800 \text{ kN/m}$$

Retomando as inequações 15 e 16, como  $n_{sx} > 0$  e  $n_{sy} \leq 0$ , pode-se dispensar o uso de armaduras de tração na direção  $y$ , o que caracteriza o caso III de dimensionamento. Assim, primeiramente verifica-se o concreto:

$$\theta = \operatorname{arctg} \left( -\frac{n_{xy}}{n_y} \right) = \operatorname{arctg} \left( -\frac{200}{-2000} \right) = 5,71^\circ$$

$$n_c = n_{xy} \cdot (\operatorname{tg} \theta + \operatorname{cotg} \theta)$$

$$n_c = 200 \cdot (\operatorname{tg} 5,71^\circ + \operatorname{cotg} 5,71^\circ) = 2020 \text{ kN/m}$$

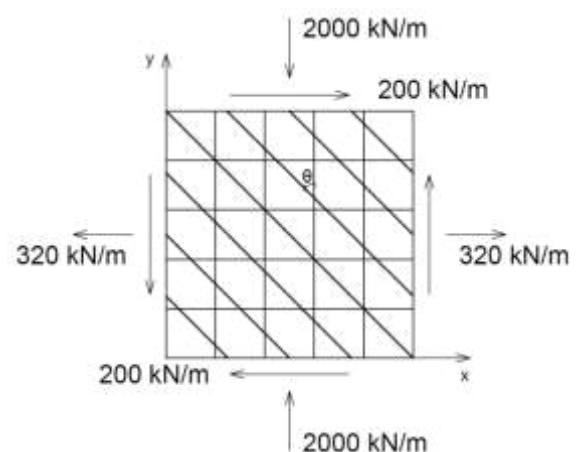
$$\sigma_c = \frac{n_c}{h} = \frac{2020}{0,12} = 16833,33 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} = 16,83 \text{ MPa}$$

$$f_{cd1} = 0,85 \cdot \left( 1 - \frac{f_{ck}}{250} \right) \cdot f_{cd} = 0,85 \cdot \left( 1 - \frac{25}{250} \right) \cdot \frac{25}{1,4} = 13,66 \text{ MPa}$$

$$f_{cd2} = 0,60 \cdot \left( 1 - \frac{f_{ck}}{250} \right) \cdot f_{cd} = 0,60 \cdot \left( 1 - \frac{f_{ck}}{250} \right) \cdot \frac{25}{1,4} = 9,64 \text{ MPa}$$

Como neste caso  $\sigma_c > f_{cd1}$ , a tensão de compressão no concreto está acima do limite máximo de resistência. Então, verifica-se a possibilidade de adotar armaduras de compressão na direção  $y$  para auxiliar o equilíbrio do esforço de compressão no concreto.

Figura 5 - Exemplo de dimensionamento



Primeiramente, como foi adotado aço CA-50, deve-se avaliar o critério exposto pela inequação 85.

$$|n_{xy}| \leq \frac{f_{cd2} \cdot h \cdot \text{sen}(2|\theta^*|)}{2} \quad (85)$$

Calcula-se  $\theta^*$  através da equação 86.

$$\theta^* = \frac{\arccos\left(\frac{\varepsilon_{yd}}{\varepsilon_{yd} + 2.2}\right)}{2}$$

$$\theta^* = \frac{\arccos\left(\frac{2,07}{2,07 + 2.2}\right)}{2} = \frac{\arccos\left(\frac{2,07}{6,07}\right)}{2} = 35,03^\circ \quad (86)$$

Agora, encontra-se o valor de  $n_{xy}$  limite:

$$|n_{xy}| \leq \frac{9642,9 \cdot 0,12 \cdot |\text{sen}(2 \cdot 35,03)|}{2} = 543,7 \text{ kN/m}$$

Portanto, como  $n_{xy}$  do problema é menor que  $n_{xy}$  limite, é possível calcular armaduras de compressão para este caso. Assim, através da equação 87, tem-se que:

$$\theta = \frac{\arcsen\left(\frac{2 \cdot n_{xy}}{f_{cd1} \cdot h} \cdot \frac{1}{0,8 + 170 \cdot \frac{[2 \cdot \varepsilon_{yd} + 2\% \cdot (1 - \cos 2\theta)]}{(1 + \cos 2\theta)}}\right)}{2} \quad (87)$$

$$\theta = \frac{\arcsen\left(\frac{2 \cdot 200}{13660,7 \cdot 0,12} \cdot \frac{1}{0,8 + 170 \cdot \frac{[2 \cdot 2,07\% + 2\% \cdot (1 - \cos 2\theta)]}{(1 + \cos 2\theta)}}\right)}{2}$$

Iterativamente verifica-se se é possível obter o valor de  $\theta$ . Pode se ver pela Tabela 4 que neste caso o valor de  $\theta$  converge. Como neste exemplo está sendo admitido que o aço é CA-50, não há necessidade de se verificar se  $\theta \leq \theta_1$ , pois  $\theta_1$  não existe. Prosseguindo, agora é possível calcular  $\varepsilon_y$ .

$$\varepsilon_y = \frac{2 \cdot \varepsilon_{yd} \cdot \varepsilon'_c \cdot (1 - \cos 2\theta)}{(1 + \cos 2\theta)} + \varepsilon'_c \cdot \varepsilon_{yd} \quad (88)$$

$$\varepsilon_y = \frac{2 \cdot 2,07\% + 2\% \cdot (1 - \cos(2 \cdot 8,27^\circ))}{(1 + \cos(2 \cdot 8,27^\circ))} - 2\% - 2,07\% = -1,91\%$$

Então, calculam-se os esforços nas armaduras.

$$n_{sx} = n_x + n_{xy} \cdot \text{tg}\theta$$

$$n_{sx} = 320 + 200 \cdot \text{tg}8,27^\circ = 329,07 \text{ kN/m} \quad (89)$$

$$n_{sy} = n_y + n_{xy} \cdot \text{cotg}\theta$$

$$n_{sy} = -2000 + 200 \cdot \text{cotg}8,27^\circ = -623,78 \text{ kN/m} \quad (90)$$

$$a_{sx} = \frac{n_{sx}}{f_{yd}} = \frac{329,07}{43,49} = 7,57 \text{ cm}^2$$

$$a_{sy} = \frac{n_{sy}}{\sigma_y} = \frac{n_{sy}}{E \cdot \varepsilon_y} = \frac{-623,78}{21000 \cdot (-1,91\%)} = 15,52 \text{ cm}^2$$

## 8. Conclusões

Foram apresentados neste trabalho métodos para determinar as armaduras de compressão para o caso II, III e IV de dimensionamento, previstos pelo CEB [3]. Também foram apresentados os limites para este dimensionamento, ou seja, delimitaram-se os casos em que é possível adotar armaduras de compressão de forma com que a tensão de compressão no concreto seja reduzida para a sua capacidade resistente. Percebe-se para todos os casos que estes limites estão relacionados apenas com o esforço de cisalhamento para o qual a chapa esta submetida.

Além disso, foi utilizado um modelo resistente para o concreto que interpola os valores de resistência entre  $f_{cd1}$  e  $f_{cd2}$  de acordo com a curva obtida por Vecchio e Collins [2], de forma que não haja descontinuidade de resistência entre os casos II e IV e casos III e IV. Também se mostrou como avaliar se a tensão de compressão no concreto está abaixo do limite para este modelo resistente.

Devido a este modelo adotado para o concreto, para os casos II e III, o dimensionamento das armaduras se tornou mais complexo e foram necessários métodos iterativos de resolução. Entretanto, ele leva a quantidades de armadura menores do que aquelas encontradas quando se usa somente os valores sugeridos pelo CEB [3] para a resistência.

Tabela 4 – Cálculo iterativo de  $\theta$

i	$\theta_i$ (°)	$\varepsilon_1$ (‰)	$f_{c2max}$ (MPa)	$\sigma_c$ (Mpa)	$\theta_i$ (°)
1	1,000	2,072	11,856	95,512	8,164
2	8,164	2,154	11,714	11,856	8,266
3	8,266	2,156	11,710	11,714	8,269
4	8,269	2,156	11,710	11,710	8,269
5	8,269	2,156	11,710	11,710	8,269
6	8,269	2,156	11,710	11,710	8,269



Quanto ao caso IV, verificou-se que existem infinitas soluções para o dimensionamento das armaduras, embora somente uma leve a armadura mínima necessária. Isto acontece devido ao menor número de variáveis fixas, se comparado aos casos II e III. Só é possível encontrar a solução para este dimensionamento econômico por meio de tentativas.

## 9. Referências bibliográficas

- [01] BAUMANN, T. Zur Frage der Netzbewehrung von Flachentragwerken. Der Bauingenieur, Vol. 47, Nº 10, 1972, p.367-377
- [02] VECCHIO, F. J.; COLLINS M. P. The Modified compression-Field theory for reinforced concrete elements subjected to shear. ACI Structural Journal. March- April, 1986, p.219-231
- [03] COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BETÓN. CEB-FIP model code 1990. London, Thomas Telford, 1993
- [04] NIELSEN M. P., On the strenght of reinforced concrete discs, ACTA Polytechnica Scandinacia, Civil Engineering and Building Construction Series, Nº 10, Copenhagen, 1971
- [05] GUPTA, AJAYA K. Membrane reinforcement in shells. Journal of the Structural Division, Proceedings of the American Society of Civil Engineers, v.107, January, 1981. p. 41-56.
- [06] VECCHIO, F. J.; COLLINS M. P. Response of Reinforced Concrete to In-Plane Shear and Normal Stresses. Publication Nº 82-03, Department of Civil Engineering, University of Toronto, March, 1982, 332p.
- [07] FIALKOW, M.N. Strength design of shell membrane reinforcement. Journal of Structural Engineering, v. 109, n. 4, 1983. p. 891-908.
- [08] ACI COMMITTEE 318. Building code requirements for structural concrete. American Concrete Institute, Detroit, 1977.
- [09] GUPTA, AJAYA K; AKBAR H. Cracking in reinforced concrete analysis. Journal of Structural Engineering, v. 110, n. 8, 1984. p. 1735-1746.
- [10] PETER, J. Zur Bewehrung von Scheiben und Schalen für Hauptspannungen Schiefwinkling zur Bewehrungsrichtung, Dissertation, T. H. Stuttgart, 1964.
- [11] CHEN, REINALDO. Dimensionamento de elementos de superfície de concreto Armado: membranas, placas e cascas. 2004. 148 p. Dissertação (Mestrado) Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2004.
- [12] JAZRA, F. M. Dimensionamento de chapas de concreto armado. 2008. 126 p. Dissertação (Mestrado) – Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2008.
- [13] LEONHARDT, F.; MONNIG, E. Construções de concreto v. 2: casos especiais de dimensionamento de estruturas de concreto armado, Rio de Janeiro, Interciências, 1978.
- [14] ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. Norma Brasileira NBR-6118: Projeto de estruturas de concreto. Rio de Janeiro, 2007.
- [15] DELLA BELLA, J. C.; CIFÚ, S. Critérios para

dimensionamento das armaduras e verificação do concreto em estruturas laminares submetidas a solicitações de chapa e placa. In: Simpósio EPUSP sobre estruturas de concreto, 4, São Paulo, 2000. Anais. São Paulo, 2000.

- [16] GUPTA, AJAYA K. Membrane reinforcement in shells: a review. Nuclear Engineering and Design, v.82, January, 1984. p. 63-75.
- [17] PEREIRA, F.A.C. Dimensionamento de estruturas de betão sujeitas a esforços de membrana associados com esforços de flexão de acordo com o Eurocódigo 2 – Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Porto, 2010
- [18] SILVA, T.F. Contribuição das armaduras de compressão em chapas de concreto armado. 2012. 115 p. Dissertação (Mestrado) – Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2012.

## 10. Símbolos

$a_{sx}$	área de armadura na direção x
$a_{sy}$	área de armadura na direção y
$E_c^{CS}$	módulo de elasticidade do aço
$f_c$	resistência característica à compressão do concreto segundo o ACI
$f_{c2}$	tensão no concreto na direção 2
$f_{cd}$	resistência de cálculo à compressão do concreto
$f_{ck}$	resistência característica à compressão do concreto
$f_{cd1}$	resistência de cálculo à compressão para o concreto não-fissurado
$f_{cd2}$	resistência de cálculo à compressão do concreto fissurado
$f_{c2max}$	resistência máxima à compressão do concreto
$f_{yd}$	tensão de escoamento de cálculo do aço
$f_{yk}$	tensão de escoamento característica do aço
$h$	espessura da chapa
$n_c$	maior esforço resistente de compressão no concreto
$n_c$	menor esforço resistente de compressão no concreto
$n_x$	esforço solicitante normal na direção x
$n_y$	esforço solicitante normal na direção y
$n_{xy}$	esforço de cisalhamento solicitante
$n_{sx}$	esforço resistente na armadura na direção x
$n_{sy}$	esforço resistente na armadura na direção y
$\epsilon_1$	deformação na direção 1
$\epsilon_2$	deformação na direção 2
$\epsilon_x$	deformação na direção x
$\epsilon_y$	deformação na direção y
$\epsilon_{sx}$	deformação da armadura na direção x
$\epsilon_{sy}$	deformação da armadura na direção y
$\epsilon_c$	deformação do concreto
$\epsilon_c'$	deformação correspondente ao tensão $f_c'$
$\epsilon_{yd}$	deformação de escoamento de cálculo do aço
$\theta$	ângulo entre o eixo y e a direção principal de compressão no concreto
$\theta_1$	ângulo limite entre as curvas $f_{cd1}$ e $f_{c2max}$
$\theta_2$	ângulo limite entre as curvas $f_{c2max}$ e $f_{cd2}$
$\theta^*$	ângulo limite para que defina o sinal de $\epsilon_y$
$\theta_{max}$	ângulo limite para dimensionamento das armaduras de compressão no caso II e III
$\theta_{xy}$	ângulo correspondente ao esforço de cisalhamento máximo
$\theta_{c1}$	ângulo limite para que a chapa permaneça em estado bi-axial de tensão no caso IV
$\theta_{c2}$	ângulo limite para que a chapa permaneça em estado bi-axial de tensão no caso IV
$\theta_x$	ângulo limite para que a tensão na armadura na direção x seja de compressão no caso IV
$\theta_y$	ângulo limite para que a tensão na armadura na direção y seja de compressão no caso IV
$\theta_{amin}$	ângulo $\theta$ que resulta na menor armadura necessária para o caso IV
$\sigma_c$	tensão no concreto na direção de maior compressão
$\sigma_c'$	tensão no concreto na direção de menor compressão
$\sigma_{cd}$	tensão de cálculo no concreto