

Finite Difference Energy Method for nonlinear numerical analysis of reinforced concrete slab using simplified isotropic damage model

Análise não linear numérica via MDFE de lajes de concreto armado utilizando a mecânica do dano



M. V. A. LIMA^a
mveniciosalmeida@gmail.com

J. M. F. LIMA^a
lima.jmf@gmail.com

P. R. L. LIMA^a
lima.pri@pq.cnpq.br

Abstract

This work presents a model to predict the flexural behavior of reinforced concrete slabs, combining the Mazars damage model for simulation of the loss of stiffness of the concrete during the cracking process and the Classical Theory of Laminates, to govern the bending of the structural element. A variational formulation based on the principle of virtual work was developed for the model, and then treated numerically according to the Finite Difference Energy Method, with the end result a program developed in Fortran. To validate the model thus proposed have been simulated with the program, some cases of slabs in flexure in the literature. The evaluation of the results obtained in this study demonstrated the capability of the model, in view of the good predictability of the behavior of slabs in flexure, sweeping the path of equilibrium to the rupture of the structural element. Besides the satisfactory prediction of the behavior observed as positive aspects of the model to its relative simplicity and reduced number of experimental parameters necessary for modeling.

Keywords: reinforced concrete slabs, damage mechanics, finite difference energy method.

Resumo

Neste trabalho é apresentado um modelo para previsão do comportamento à flexão de lajes de concreto armado, combinando o modelo de dano de Mazars, para simulação da perda de rigidez do concreto durante o processo de fissuração e a Teoria Clássica de Laminados, para reger a flexão do elemento estrutural. Uma formulação variacional com base no princípio dos trabalhos virtuais foi desenvolvida para o modelo, sendo em seguida tratada numericamente segundo o Método das Diferenças Finitas Energéticas (MDFE), tendo como resultado final um programa desenvolvido em Fortran. Para validar o modelo proposto, foram simulados com o programa dois casos de lajes sob flexão, encontrados na literatura. A avaliação dos resultados obtidos nas análises demonstrou a potencialidade do modelo, tendo em vista a boa capacidade de previsão do comportamento de lajes sob flexão, varrendo a trajetória de equilíbrio até a ruptura do elemento estrutural. Além da satisfatória previsão do comportamento observou-se, como aspectos positivos do modelo, a sua relativa simplicidade e o número reduzido de parâmetros experimentais necessários à modelagem.

Palavras-chave: laje de concreto armado, mecânica do dano, método das diferenças finitas energéticas.

^a Universidade Estadual de Feira de Santana, Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil e Ambiental, Feira de Santana, Bahia, Brasil.

1. Introdução

As estruturas de concreto são utilizadas em todo o mundo nas mais diferentes aplicações como pontes, edificações, estradas, etc. Por outro lado, devido à necessidade de redução do consumo de recursos naturais e do consumo de energia, na produção do cimento e aço, torna-se necessário que as estruturas usem todo o potencial destes materiais. Como as normas de dimensionamento permitem a adoção de modelos simplificados para o cálculo dos elementos de concreto armado, o que se verifica, muitas vezes, é a utilização de estruturas mais robustas, e mais caras, do que seria necessário para manter a segurança e uso esperados. Para minimizar esse problema é importante a utilização de métodos de análise mais avançados, que incorporem a não linearidade física do material e possam prever com maior precisão o comportamento estrutural de elementos de concreto em estágios avançados de fissuração e deformação.

Desde 1904 o Método das Diferenças Finitas (MDF) tem sido utilizado na solução de equações diferenciais para análise estrutural de vigas contínuas e placas [1]. Como método computacional o MDF, junto com o Método dos Elementos Finitos (MEF), surgiu na literatura técnica na década de 50. Muitas idéias e técnicas são comuns aos dois métodos, mas devido ao uso mais sistemático da abordagem variacional e maior flexibilidade geométrica o MEF tornou-se o mais utilizado ao longo do anos [2]. No entanto, estudos posteriores tem demonstrado a capacidade do MDF na análise de estruturas de concreto armado como lajes [3], elementos tracionados [4], pórticos [5] e colunas [6]. Devido a versatilidade do MDF a análise destas estruturas tem sido desenvolvida com a incorporação de não linearidade física e/ou geométrica para avaliação de fissuração, carga de ruptura, escorregamento aço-concreto, deflexão, flambagem e mesmo "spalling" do concreto. Os resultados desses estudos indicam que: i) a comparação com o resultado experimental confirma a validade do método; ii) o procedimento de análise em diferenças finitas é ao mesmo tempo rápido e preciso, e, dessa forma, adequado para utilização em escritórios de projeto estrutural, visto que combina a velocidade de análise com a precisão do MEF [7].

Uma evolução do MDF é o Método das Diferenças Finitas Energéticas (MDFE) que possui algumas vantagens sobre a abordagem tradicional, a exemplo da utilização de derivadas de menor ordem e, portanto, de maior precisão. Isto é decorrente do fato de que as representações em diferenças finitas das derivadas dos deslocamentos, serem inseridas diretamente nas equações do princípio variacional. Outra vantagem é o fato de somente condições de contorno cinemáticas serem requisitadas, por ser o MDFE baseado em equações de energia, fato este que o faz ter uma estrutura similar ao MEF, sendo a discretização concebida em termos de trechos de integração e graus de liberdade nodais. Todavia, cabe ressaltar que há redução do número de graus de liberdade por nó, comparativamente a um tratamento via MEF. Um último aspecto é o fato da matriz de coeficientes dos deslocamentos resultar simétrica para uma grande variedade de problemas, o que implica em considerável economia do esforço computacional. Portanto, o potencial do MDFE para análise mecânica de estruturas complexas fica evidente. De fato, aplicações estruturais do MDFE foram apresentadas por Houbolt [8], Griffin e Varga [9] e Bushnell [10]. No Brasil o MDFE tem sido utilizado desde a década de 1980 para análise de vigas, placas e cascas isotrópicas [11-14]. e mais re-

centemente tem sido utilizado para análise de vigas de concreto armado e concreto com fibras [15]. Para tal, foi utilizada a mecânica do dano para predição do comportamento tensão-deformação do concreto sob tração e compressão o que resultou em uma boa aproximação do resultado numérico com os resultados experimentais de vigas de concreto. Isso credencia o modelo para análise de estruturas mais complexas como lajes de concreto armado. Quanto à aplicação de modelos não lineares para o estudo de lajes de concreto armado, embora se constata um volume menos expressivo de trabalhos publicados em comparação à literatura voltada às vigas de concreto armado, podem ser destacadas importantes contribuições para a previsão teórica do comportamento à flexão de lajes. A consideração da não linearidade tem sido feita através de modelos elastoplásticos combinado com o MEF [16-17] ou pelo modelo de dano de Mazars [18] através do método dos elementos de contorno [19] sozinho ou combinado com o MEF [20]. Modelos baseados na Mecânica da Fratura foram utilizados por Bandeira [21], que analisou lajes de concreto armado utilizando o programa Diana, este baseado no MEF. A análise desse conjunto de resultados revela que a utilização de modelos não lineares para modelagem do comportamento tensão-deformação do concreto é fundamental para se conseguir prever de forma satisfatória o comportamento estrutural de lajes de concreto armado sob flexão.

O objetivo principal deste trabalho é verificar a aplicação do MDFE na análise não linear de lajes de concreto armado usando o modelo de dano de Mazars [18]. Outros modelos não lineares, baseados em resultados experimentais, têm sido utilizados para descrever o comportamento do concreto sob tensão [22-24], mas o modelo de Mazars foi escolhido por seu bom desempenho na análise de vigas de concreto armado [25-26] e pelo fato deste requerer poucos parâmetros experimentais, e todos de obtenção relativamente simples. Para validação do modelo proposto foram analisadas duas lajes de concreto armado avaliadas experimentalmente por Taylor et al. [27] e McNeice [28].

2. Desenvolvimento da formulação analítica

2.1 Modelo de dano

O modelo de dano de Mazars [18] é um modelo relativamente simples quando comparado a outros. Nesse modelo a variável de dano é medida em função do alongamento do material e possui as seguintes hipóteses básicas:

- O processo de dano do concreto ocorre no estado elástico, não apresentando deformações plásticas;
- O concreto é considerado isotrópico mesmo após o início da danificação;
- A evolução do dano ocorre quando o limite de deformação elástica de alongamento é ultrapassado.

As tensões em uma dada direção principal i ($i = 1, 2, 3$) podem ser representadas em função de suas parcelas positiva e negativa da seguinte forma:

$$\sigma_i^+ = \sigma_i \text{ se } \sigma_i > 0 \text{ e } \sigma_i^- = 0 \text{ se } \sigma_i \leq 0 \quad (1a)$$

$$\sigma_i^- = \sigma_i \text{ se } \sigma_i < 0 \text{ e } \sigma_i^- = 0 \text{ se } \sigma_i \geq 0 \quad (1b)$$

Dessa forma as deformações por tração e por compressão podem ser escritas em função das tensões, através da lei de Hooke, como a seguir:

$$\epsilon_{ii} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_i^+ - \frac{\nu}{E} \sum_{j=1}^3 \sigma_j^+ \quad (2a)$$

$$\epsilon_{ci} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_i^- - \frac{\nu}{E} \sum_{j=1}^3 \sigma_j^- \quad (2b)$$

onde ν é o coeficiente de Poisson do concreto. A deformação principal na direção i pode então ser expressa por:

$$\epsilon_i = \epsilon_{ii} + \epsilon_{ci} \quad (3)$$

As deformações associadas aos alongamentos desenvolvidos em cada direção principal i são dadas por:

$$\epsilon_i^+ = \frac{1}{2} (\epsilon_i + |\epsilon_i|) \quad (4)$$

Nota-se assim, que só são contabilizadas as deformações que geram alongamento em (4). Portanto, de acordo com as deformações apresentadas na equação (3), a deformação equivalente $\bar{\epsilon}$ pode ser assim definida:

$$\bar{\epsilon} = \sqrt{(\epsilon_1^+)^2 + (\epsilon_2^+)^2 + (\epsilon_3^+)^2} \quad (5)$$

Para compatibilizar o modelo de dano com a Teoria Clássica de Laminados, será adotada a medição das deformações em pontos da superfície média de cada camada que constitui a placa. Segundo o modelo de Mazars [18], o processo de danificação do material só ocorre para valores de deformações superiores a ϵ_{do} , ou seja o limite de tração do material, a partir do qual tem início a fissuração do concreto. Portanto, a condição para permanência do concreto no regime linear fica assim expressa:

$$\bar{\epsilon} - \epsilon_{do} \leq 0 \quad (6)$$

Devido ao comportamento assimétrico do concreto em relação à tração e compressão, existe a necessidade de determinação de duas variáveis distintas para o dano, uma para compressão D_{cc} , e outra para tração D_{ct} . Para o caso multiaxial, o dano do concreto D_c deve ser obtido através de uma combinação linear dessas duas variáveis, ficando o dano assim representado:

$$D_c = \alpha_t D_{ct} + \alpha_c D_{cc} \quad (7)$$

onde:

$$\alpha_t = \frac{\sum_{i=1}^3 \epsilon_{ii}^+}{\epsilon_v^+} \quad (8a)$$

$$\alpha_c = \frac{\sum_{i=1}^3 \epsilon_{ci}^+}{\epsilon_v^+} \quad (8b)$$

com

$$\epsilon_{ii}^+ = \frac{1}{2} (\epsilon_{ii} + |\epsilon_{ii}|) \quad (9a)$$

$$\epsilon_{ci}^+ = \frac{1}{2} (\epsilon_{ci} + |\epsilon_{ci}|) \quad (9b)$$

$$\epsilon_v^+ = \sum_{i=1}^3 (\epsilon_{ii}^+ + \epsilon_{ci}^+) \quad (9c)$$

cabendo observar que: $0 \leq \alpha_t \leq 1; 0 \leq \alpha_c \leq 1; \alpha_t + \alpha_c = 1$. As equações definidas por Mazars [18] para a evolução do dano por tração D_{ct} e compressão D_{cc} são apresentadas a seguir:

$$D_{ct} = 1 - \frac{\epsilon_{do} (1 - A_t)}{\bar{\epsilon}} - \frac{A_t}{\exp[B_t (\bar{\epsilon} - \epsilon_{do})]} \quad (10a)$$

$$D_{cc} = 1 - \frac{\epsilon_{do} (1 - A_c)}{\bar{\epsilon}} - \frac{A_c}{\exp[B_c (\bar{\epsilon} - \epsilon_{do})]} \quad (10b)$$

onde as constantes A_t , B_t , A_c e B_c são parâmetros do material

(concreto) determinados a partir das correspondentes curvas experimentais tensão-deformação ($\sigma - \varepsilon$), à tração e à compressão uniaxial, respectivamente. Para tanto, são geradas duas curvas teóricas ($\sigma - \varepsilon$), ajustadas às experimentais (uma para tração e outra para compressão), utilizando a equação baseada no modelo de dano, ou seja:

$$\sigma = E_c (1 - D_c) \varepsilon \quad (11)$$

sendo E_c o módulo de elasticidade longitudinal do concreto.

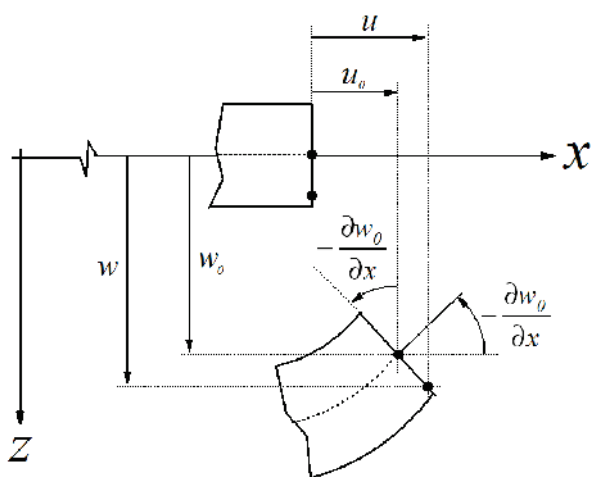
2.2 Modelo de flexão

Na formulação analítica foi utilizada a Teoria Clássica dos Laminados. Na abordagem discreta o concreto e o aço são modelados separadamente e a construção do modelo torna-se mais difícil e demorada uma vez que um grande número de graus de liberdade é necessário [17]. Na abordagem por camadas o elemento estrutural é formulado como um compósito laminado que consiste de camadas finas, de concreto ou de aço, totalmente aderidas entre si. As tensões de tração e de compressão são monitoradas progressivamente, em cada camada, para verificar a fissuração ou esmagamento do concreto e o escoamento ou ruptura do aço. Modelos em MEF por camadas têm sido amplamente utilizados para análise de estruturas de concreto armado [17, 24, 29-31] e têm se mostrado eficiente.

Para análise do laminado as seguintes hipóteses são consideradas [32-33]:

- 1) O laminado consiste de lâminas perfeitamente coladas entre si, isto é, sem deslizamento ou descolamento. Isto significa que os deslocamentos são descritos por funções contínuas;

Figura 1 - Geometria de deformação da placa no plano xz



- 2) A placa é considerada delgada, ou seja, a espessura é relativamente pequena em relação às outras duas dimensões (superfície);
- 3) Linhas inicialmente retas e perpendiculares à superfície que define a geometria da estrutura (superfície média da placa) permanecem retas e perpendiculares a essa superfície, quando o laminado for solicitado;
- 4) As linhas normais à superfície de referência são consideradas inextensíveis, isto é, têm comprimentos constantes;
- 5) Supõe-se que o carregamento na placa acarreta rotações e deformações pequenas perante a unidade, enquadrando o problema no âmbito geometricamente linear;
- 6) As lâminas são formadas por materiais ortotrópicos de comportamento linear elástico (observa-se que o comportamento deixa de ser linear, por conta das considerações feitas para as relações tensão-deformação do concreto e do aço);
- 7) Admite-se que todas as cargas são aplicadas na superfície média da placa.

As hipóteses 2 a 5, usadas na teoria de Kirchhoff para placas delgadas, juntamente com a hipótese 1, permitem deduzir as relações mostradas a seguir, entre as componentes de deslocamento u , v e w de um ponto qualquer da placa, e as componentes u_0 , v_0 e w_0 de um ponto correspondente situado sobre a superfície média (Figura 1):

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \quad (12a)$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} \quad (12b)$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) \quad (12c)$$

onde as derivadas $\frac{\partial w_0}{\partial x}$ e $\frac{\partial w_0}{\partial y}$ são, respectivamente, as declividades da superfície média nas direções x e y .

Com base na hipótese 5 têm-se as seguintes relações deformação-deslocamentos:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \quad (13a)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \quad (13b)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \quad (13c)$$

$$\epsilon_z = 0 \quad (13d)$$

$$\gamma_{xz} = 0 \quad (13e)$$

$$\gamma_{yz} = 0 \quad (13f)$$

Considerando que as lâminas estão em um estado plano de tensões, tem-se para uma lâmina k as seguintes relações entre tensões e deformações atuantes, já incorporando a não linearidade física dos materiais, através do dano contínuo de Mazars (Concreto) e do modelo elastoplástico perfeito (aço):

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (14)$$

com as propriedades mecânicas das lâminas (ortotrópicas), como mostra a hipótese 6, calculadas por:

$$\bar{Q}_{11} = Q_{11} \cos^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{22} \sin^2 \theta \quad (15a)$$

$$\bar{Q}_{12} = (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{12} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) \quad (15b)$$

$$\bar{Q}_{22} = Q_{11} \sin^2 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{22} \cos^4 \theta \quad (15c)$$

$$\bar{Q}_{16} = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta \quad (15d)$$

$$\bar{Q}_{26} = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta \quad (15e)$$

$$\bar{Q}_{66} = (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{66} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) \quad (15f)$$

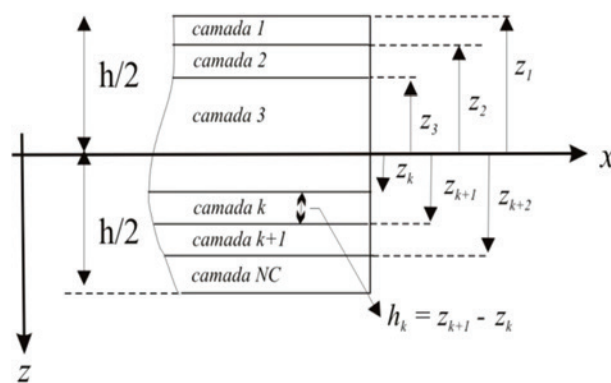
com θ representando o ângulo de orientação das fibras de reforço na camada k, e

$$Q_{11} = \left[\frac{E_1 (1 - D)}{1 - \nu_{12} \nu_{21}} \right] \quad (16a)$$

$$Q_{12} = \left[\frac{\nu_{12} E_2 (1 - D)}{1 - \nu_{12} \nu_{21}} \right] \quad (16b)$$

$$Q_{22} = \left[\frac{E_2 (1 - D)}{1 - \nu_{12} \nu_{21}} \right] \quad (16c)$$

Figura 2 - Camadas de um laminado



$$Q_{66} = G_{12} (1 - D) \tag{16d}$$

onde:

E_1 é o módulo de elasticidade longitudinal da camada na direção x ;
 E_2 é o módulo de elasticidade longitudinal da camada na direção y ;
 ν_{12} e ν_{21} são os coeficientes de Poisson da camada, associados as direções x e y ;

G_{12} é o módulo de elasticidade transversal da camada, associado às direções x e y ;

D representa o dano no material constituinte da camada estudada (ou, em outras palavras a relação entre a perda de rigidez do material e sua rigidez inicial).

Na presente formulação são definidos os seguintes esforços solicitantes por unidade de comprimento, avaliados na espessura h da placa laminada (Figura 2):

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \tag{17a}$$

$$\begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \tag{17b}$$

onde N_{xx} , N_{yy} e N_{xy} são os esforços de membrana, M_{xx} e M_{yy} os esforços flexionais e M_{xy} o esforço torsional, todos por unidade de comprimento.

A matriz contendo os coeficientes A_{ij} é denominada matriz de rigidez extensional, a que contém os elementos D_{ij} é a matriz de rigidez flexional e a composta pelos elementos B_{ij} é a matriz de rigidez de acoplamento flexo-extensional. Esses coeficientes são definidos em termos da matriz de rigidez de cada lâmina, conforme a seguir:

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^n \bar{Q}_{ij}^{(k)} (z_{k+1} - z_k) dz \tag{18a}$$

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \bar{Q}_{ij}^{(k)} ((z_{k+1})^2 - z_k^2) dz \tag{18b}$$

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n \bar{Q}_{ij}^{(k)} ((z_{k+1})^3 - z_k^3) dz \tag{18c}$$

Como se vê os esforços internos (17) são definidos para todos os

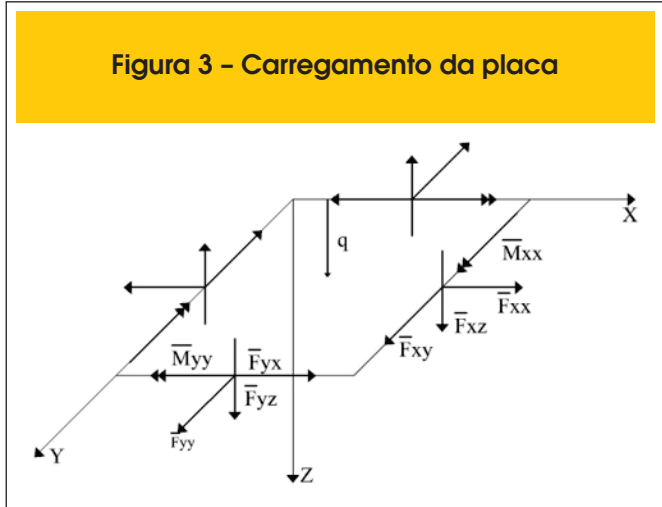


Figura 3 - Carregamento da placa

pontos do plano médio da placa, dependendo tanto dos deslocamentos do plano médio, quanto das propriedades mecânicas dos materiais da placa. Portanto, ao incorporar o modelo de dano para o concreto e o regime elastoplástico perfeito para o aço as propriedades mecânicas são afetadas à medida que a não linearidade física é atingida, modificando também as inúmeras rigidezes A_{ij} , B_{ij} e D_{ij} da estrutura.

O trabalho virtual realizado pelas forças internas é assim expresso:

$$\delta W_{int} = \int_{r_0} \left\{ N_{xx} \delta \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \right) + N_{yy} \delta \left(\frac{\partial v_0}{\partial y} \right) + N_{xy} \left[\delta \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} \right) + \delta \left(\frac{\partial v_0}{\partial x} \right) \right] - M_{xx} \delta \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) - M_{yy} \delta \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) - 2M_{xy} \delta \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right) \right\} dx dy \tag{19}$$

onde r_0 representa a área da superfície média da placa. Considerando-se a Figura 3, associada a hipótese 7, onde as cargas atuantes no domínio e no contorno da placa são mostradas com seus sentidos positivos, pode-se escrever para o trabalho virtual realizado pelas forças externas a seguinte expressão:

$$\delta W_{ext} = \int_{r_0} q_z(x, y) \delta w_0 dx dy + \int_0^b \left(\bar{F}_{xx} \delta u_0 + \bar{F}_{xy} \delta v_0 + \bar{F}_{xz} \delta w_0 - \bar{M}_{xx} \delta \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \right)_{x=0}^{x=a} dy + \int_0^a \left(\bar{F}_{yx} \delta u_0 + \bar{F}_{yy} \delta v_0 + \bar{F}_{yz} \delta w_0 - \bar{M}_{yy} \delta \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \right)_{y=0}^{y=b} dx \tag{20}$$

onde:

$q_z(x, y)$ é a força transversal à superfície média da placa, por unidade de área, aplicada no domínio;

\bar{F}_{xx} , \bar{F}_{xy} e \bar{F}_{xz} são as forças por unidade de comprimento ao longo dos bordos $x = 0$ e $x = a$, segundo as direções x , y e z , respectivamente;

Figura 4 - Função $f(x)$ utilizada nas representações em diferenças finitas para as derivadas dos deslocamentos

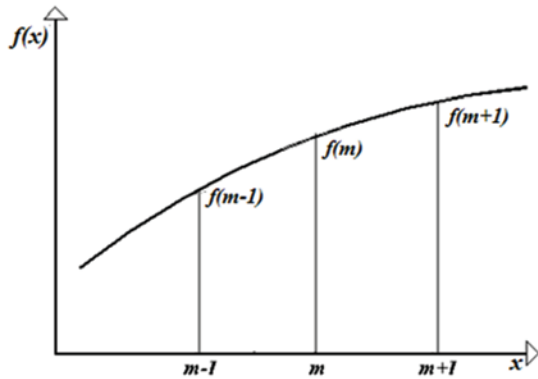
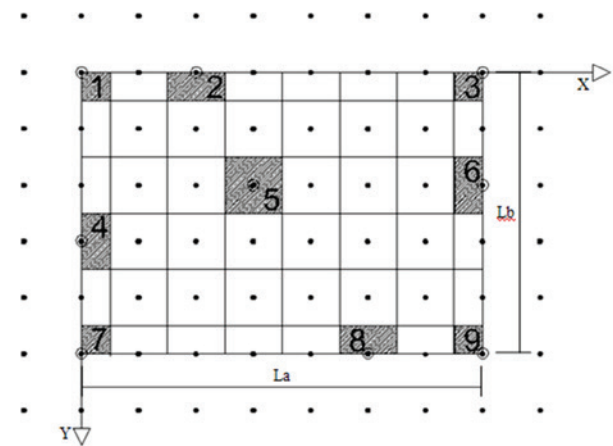


Figura 5 - Discretização da placa: trechos de integração, nós reais e nós virtuais



\bar{M}_{xx} é o Momento de flexão por unidade de comprimento, aplicado ao longo dos bordos $x = 0$ e $x = a$;

\bar{F}_{yx} , \bar{F}_{yy} e \bar{F}_{yz} são as forças por unidade de comprimento ao longo dos bordos $y = 0$ e $y = b$, segundo as direções x , y e z , respectivamente;

\bar{M}_{yy} - Momento de flexão por unidade de comprimento, aplicado ao longo dos bordos $y = 0$ e $y = b$.

Embora o momento de torção tenha sido considerado no âmbito dos esforços internos, não foi associado um carregamento correspondente, no cômputo do trabalho externo, por não ser usualmente aplicado em lajes.

3. Formulação computacional

Após expressar o trabalho realizado pelas forças internas em função dos deslocamentos, mediante a substituição das expressões dos esforços internos (17a) e (17b) em (19), o tratamento numérico segundo o MDFE pode ser aplicado. Este consiste em introduzir nas expressões das parcelas que compõem o princípio

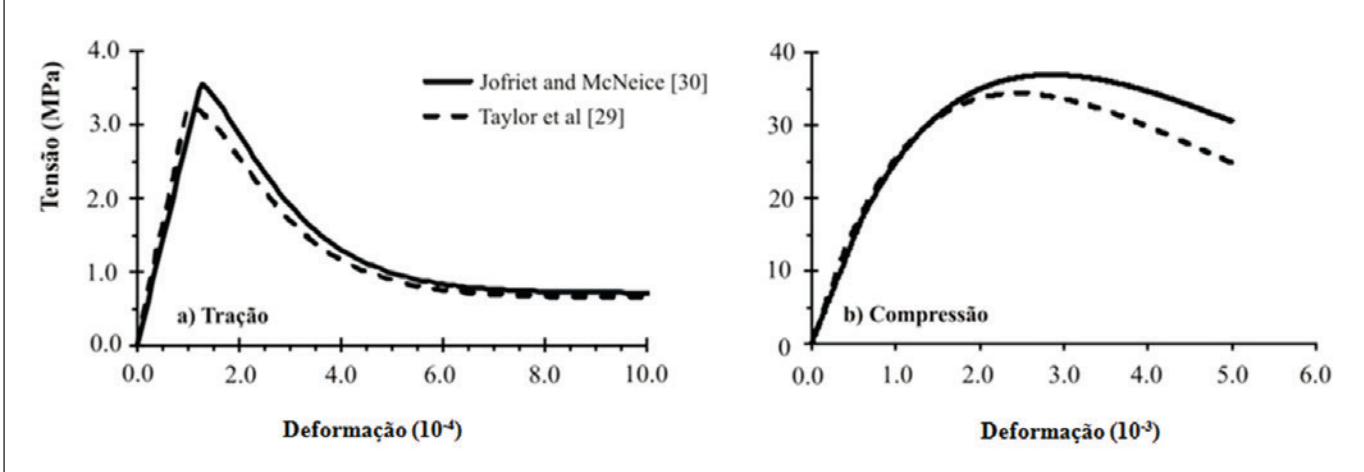
dos trabalhos virtuais (PTV), δW_{int} e δW_{ext} , as representações em diferenças finitas utilizadas para as derivadas dos deslocamentos supondo, para fins de avaliação desses trabalhos virtuais, a barra subdividida em trechos de integração, ao longo dos quais todas as grandezas envolvidas são supostas constantes. Uma vez computados δW_{int} e δW_{ext} , mediante o somatório das contribuições dos diversos trechos de integração, e considerando-se as condições cinemáticas de vinculação da placa, e as demais variações dos deslocamentos arbitrárias e independentes entre si, surge, pela aplicação do PTV, um sistema de equações algébricas de equilíbrio que, uma vez resolvido, permite obter a solução em termos dos deslocamentos nodais u_0 , v_0 e w_0 incógnitos.

Na formulação numérica do problema aqui estudado são utilizados dois tipos de representações para as derivadas dos deslocamentos: a representação centrada e a representação reduzida. Para tanto, considere o esquema da Figura 4, onde $f(x)$

Tabela 1 - Propriedades dos materiais utilizados na modelagem

Laje simplesmente apoiada										
	E(GPa)	ν_c	f_c (MPa)	A_c	B_c	f_t (MPa)	ϵ_{ad}	A_t	B_t	f_y (MPa)
Concreto	32,42	0,18	35,04	1,00	1600	3,60	$1,11 \times 10^{-4}$	0,80	10000	-
Aço	206,91	-	-	-	-	-	-	-	-	375,90
Laje apoiada nos cantos										
	E(GPa)	ν_c	f_c (MPa)	A_c	B_c	f_t (MPa)	ϵ_{ad}	A_t	B_t	f_y (MPa)
Concreto	28,61	0,15	37,92	1,00	1650	3,80	$1,33 \times 10^{-4}$	0,80	10000	-
Aço	201,30	-	-	-	-	-	-	-	-	345,40

Figura 6 - Diagramas tensão-deformação obtidos a partir do modelo de dano de Mazars para os concretos empregados nas lajes estudadas



representa as funções u_0 , v_0 e w_0 e m é o ponto no qual são avaliadas as derivadas (ponto pivotal). Sendo λ o espaçamento nodal, as derivadas centradas de primeira e segunda ordem de

$$f(x), \text{ avaliadas no ponto } m, \text{ são: } f'_m = \frac{1}{2\lambda}(f_{m+1} - f_{m-1})$$

$$\text{e } f''_m = \frac{1}{\lambda^2}(f_{m+1} - 2f_m + f_{m-1}).$$

Em trechos localizados junto aos bordos da placa, o uso da representação centrada para as derivadas primeiras dos deslocamentos u_0 e v_0 podem causar singularidade na matriz dos coeficientes, impossibilitando a resolução do problema. Por esse motivo, para essas derivadas na região dos bordos da placa será adotada a representação reduzida, conforme sugerido por Graça [14]. Esta

$$\text{representação pode ser definida por: } f'_m = \frac{1}{\lambda}(f_{m+1} - f_m).$$

Para a discretização do domínio $L_a \times L_b$ da placa, o MDFE prevê a geração de trechos de integração obtidos a partir de subdivisões nas direções x e y , quais sejam n_x e n_y , respectivamente. Desse modo um trecho de integração genérico apresenta a forma retangular de dimensões $\lambda_x = L_a / n_x$ e $\lambda_y = L_b / n_y$, com um total de $(n_x + 3) \times (n_y + 3)$ nós e $(n_x + 1) \times (n_y + 1)$ trechos de integração distribuídos em nove tipos diferentes de trechos, conforme mostrado na Figura 5. Os trechos 1, 3, 7 e 9 localizam-se nos cantos da

placa e apresentam área $\frac{\lambda_x \times \lambda_y}{4}$, enquanto os trechos 2, 4, 6 e

8, de área $\frac{\lambda_x \times \lambda_y}{2}$, situam-se ao longo dos bordos da placa. Os

demaís trechos de integração da placa pertencem ao trecho tipo 5, de área $\lambda_x \times \lambda_y$, como ilustrado na Figura 5.

Figura 7 - Características geométricas da laje e do respectivo reforço
FONTE: Adaptado de Jiang e Mirza (16)

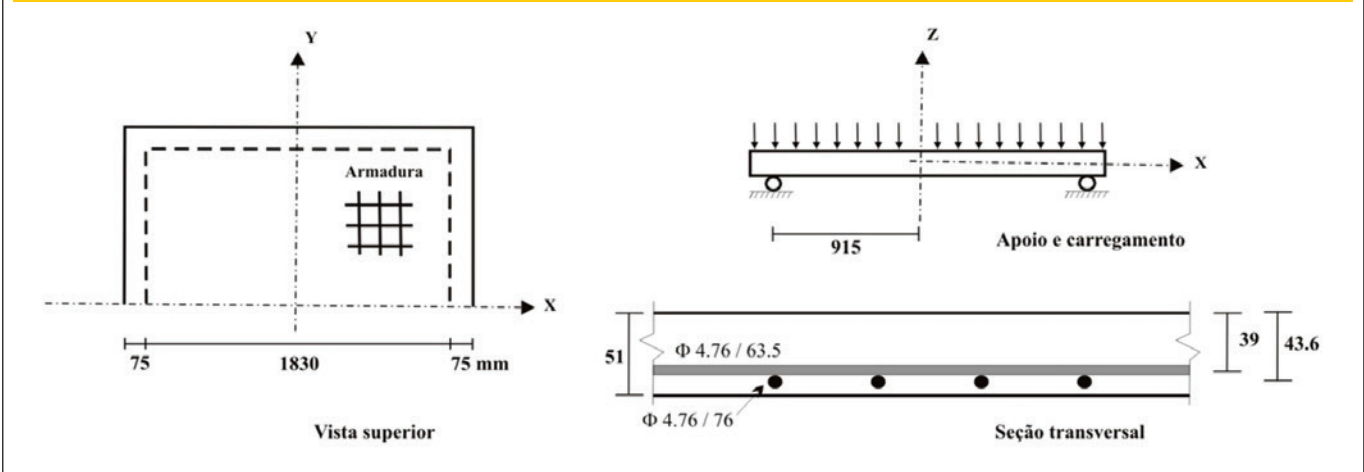
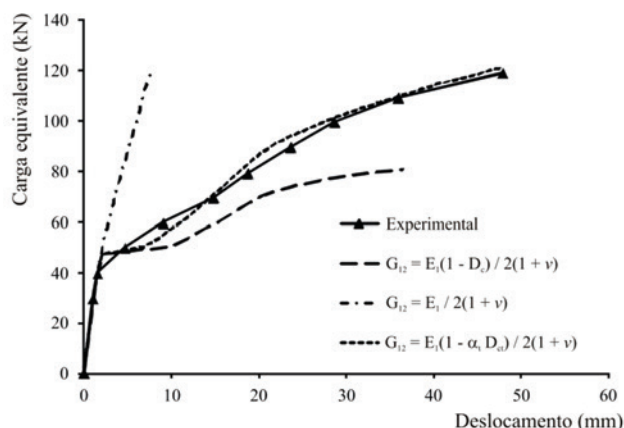


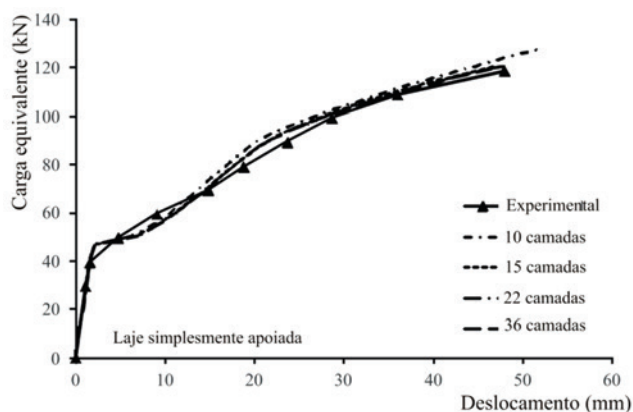
Figura 8 – Efeito do tipo de redução do módulo de elasticidade transversal do concreto no comportamento da laje



Cabe observar que cada trecho de integração é composto por nove pontos nodais (Figura 5) e para cada um desses pontos são associados três graus de liberdade u_0 , v_0 e w_0 , o que incorpora, para cada trecho, um total de 27 deslocamentos. Notar que as derivadas de segunda ordem dos deslocamentos dos nós associados aos bordos da placa necessitam de nós externos à mesma, denominados de nós virtuais. Cabe destacar ainda que os nós da estrutura podem compor mais de um trecho de integração.

Maiores explicações sobre a seqüência do desenvolvimento do tratamento numérico, segundo o MDFE, podem ser encontradas em [13-15].

Figura 9 – Influência da quantidade de camadas na modelagem da laje simplesmente apoiada



4. Validação do modelo

A validação do modelo numérico apresentado foi realizada através da determinação da curva carga-deslocamento de duas lajes de concreto armado ensaiadas experimentalmente por Taylor, Mather e Hayes [27] e McNeice [28]. Ambos os problemas apresentam dupla simetria, o que permitiu a modelagem de um quarto da placa, possibilitando uma melhor discretização do elemento estrutural com menor esforço computacional. A simulação será baseada no diagrama carga-flecha, e na previsão do colapso da estrutura. A Tabela 1 apresenta os dados experimentais dos concretos (E_c , f_c , f_t e ν_c) e dos aços (E_s e f_y) utilizados nas duas lajes estudadas. Para o concreto da laje apoiada nos cantos [28] foi admitido que $f_t = 0.1f_c$. A partir dos valores apresentados para o concreto de ambas as lajes, foram obtidos diagramas tensão-deformação teóricos (Figura 6), utilizando as equações de dano, equações (10) e (11), com a escolha de valores adequados para os parâmetros A_t , B_t e B_c . Para tanto, inicialmente determina-se o parâmetro de deformação ϵ_{do} a partir da tensão máxima de tração do concreto (f_t), pela aplicação direta da forma uniaxial da Lei de Hooke, assumindo a igualdade entre o módulo de elasticidade à tração e o módulo de elasticidade à compressão, indicado na Tabela 1. Em seguida, passa-se a geração das curvas teóricas tensão-deformação buscando-se ajustá-las às curvas experimentais correspondentes (tração uniaxial e compressão uniaxial), pela manipulação das constantes A_t , B_t e B_c . No caso da tração, as constantes A_t e B_t são determinadas de modo a gerar um diagrama tensão-deformação associado ao comportamento frágil do concreto, sendo f_t a tensão máxima observada (onde ocorre ϵ_{do}). Cabe mencionar nesse ponto que os valores adotados para A_t foram similares aos encontrados por Lemaitre e Mazars [34] e Challamel [35], na modelagem de vigas de concreto armado. No tocante à compressão, os parâmetros A_c e B_c são determinados de forma a se obter a tensão máxima de compressão do material (f_c) associada a uma deformação (de pico) entre 2‰ e 3‰. Ressalta-se que o procedimento acima, para determinação dos parâmetros do Modelo de Mazars, foi similar ao adotado por

Figura 10 – Carga x deslocamento transversal do ponto central da placa

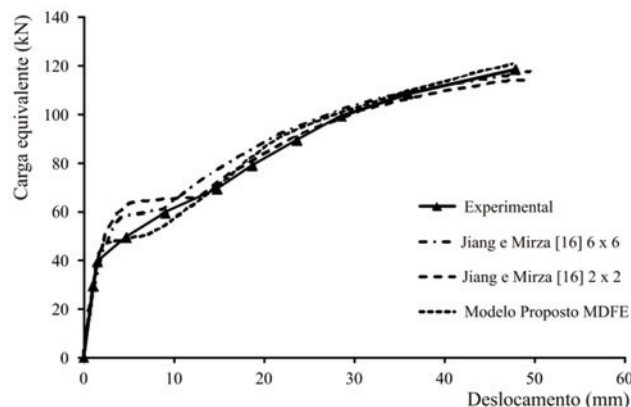
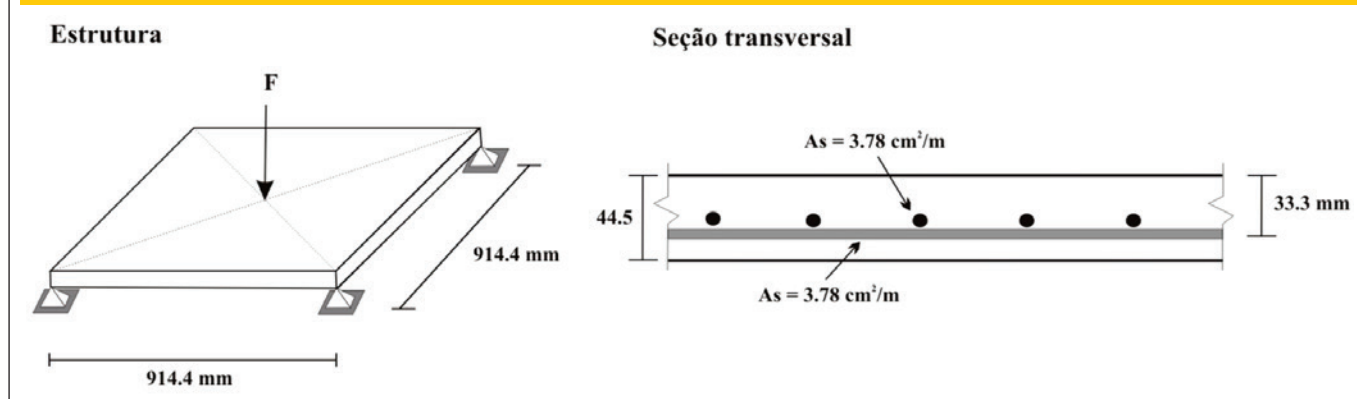


Figura 11 - Características geométricas da laje estudada. FONTE: Adaptado de Krätzig e Pöling (37)



diversos autores [18, 19, 23, 25, 34, 36] que utilizaram esse modelo de dano para modelagem numérica de concreto.

Cabe registrar que para os dois concretos assim modelados não foram apresentadas as curvas experimentais correspondentes na Figura 6, por não terem sido determinadas pelos autores dos respectivos experimentos. Todavia, isto não se mostrou uma dificuldade já que foi levado em consideração apenas o conhecimento já estabelecido para a forma do diagrama tensão-deformação dos concretos convencionais, conforme descrito na metodologia acima. Este aspecto pode ser destacado como uma vantagem de se empregar o modelo de dano aqui utilizado na modelagem de lajes.

O reforço (armaduras de aço) foi modelado como uma camada uniaxial (com módulo de elasticidade longitudinal apenas na direção do reforço), sendo o centro da camada coincidente com o centro geométrico da armadura, e a espessura da camada definida de forma que a área da seção transversal da camada resulte igual à área do reforço. A partir da tensão de escoamento do reforço (f_y) é estabelecido o patamar de escoamento do diagrama ten-

são-deformação elasto-plástico correspondente, sendo a deformação última assumida igual a 10‰ (tração e compressão).

4.1 Laje simplesmente apoiada com carregamento uniforme

Inicialmente foi simulado numericamente o comportamento de uma laje simplesmente apoiada sob carga distribuída uniforme, conforme mostrado na Figura 7, ensaiada experimentalmente por Taylor, Mather e Hayes [27] e analisada teoricamente por Jiang e Mirza [16]. Além das características geométricas da laje a figura mostra que a laje possui armaduras com diâmetro de 4,76 mm nas duas direções, mas com espaçamentos distintos. As propriedades dos materiais utilizados na laje estão listadas na Tabela 1, bem como os parâmetros de dano encontrados para o respectivo concreto.

Depois de uma série de testes foi definida para a modelagem da placa uma discretização em 8×8 subdivisões (ou seja 9×9 trechos de integração). Para este exemplo além do confronto com o

Figura 12 - Influência da quantidade de camadas na modelagem da laje apoiada nos cantos

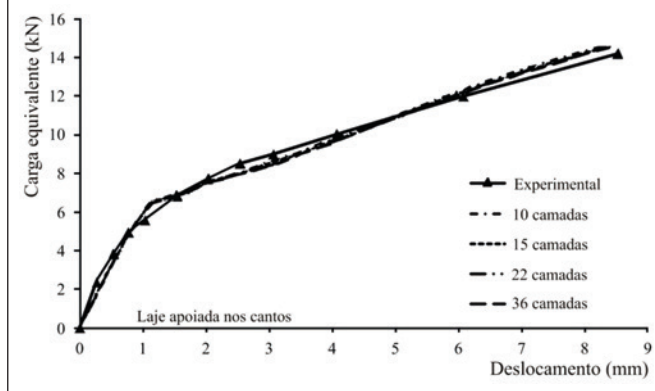
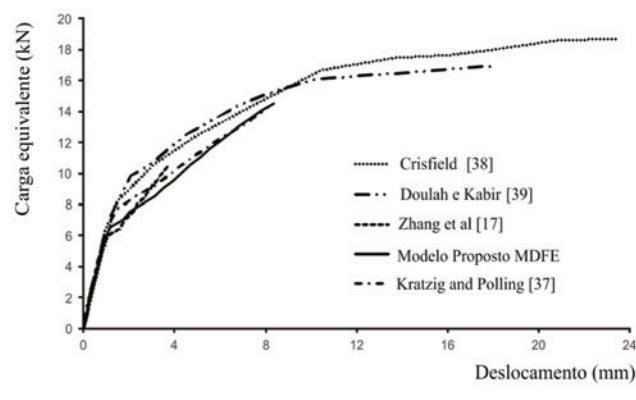


Figura 13 - Comparação do modelo proposto com Método dos Elementos Finitos



resultado experimental também foi realizado um estudo da influência das diferentes formas de avaliação da redução do módulo de elasticidade transversal do concreto durante o processo de fissuração. Foram então testadas três situações:

1) A consideração da redução do módulo de elasticidade transversal em função do dano do concreto, ou seja:

$$G_{12} = \frac{E_1(1-D_c)}{2(1+\nu)}, \text{ com } E_1 = E_c, \nu = \nu_c \text{ e } D_c = \alpha_t D_{ct} + \alpha_c D_{cc};$$

2) A consideração de que o módulo de elasticidade transversal mantém-se constante, mesmo após o início do processo de fissuração, e proporcional ao módulo de elasticidade longitudinal inicial:

$$G_{12} = \frac{E_1}{2(1+\nu)}, \text{ onde } E_1 = E_c \text{ e } \nu = \nu_c;$$

3) A consideração da redução do módulo de elasticidade transversal em função do dano por tração, ou seja,

$$G_{12} = \frac{E_1(1-\alpha_t D_{ct})}{2(1+\nu)}, \text{ sendo } E_1 = E_c \text{ e } \nu = \nu_c.$$

Os resultados numéricos para o diagrama carga-deslocamento no centro da laje são apresentados na Figura 8, em comparação com o resultado experimental, devendo ser observado que a carga registrada no gráfico é a carga resultante sobre a placa (força concentrada).

Observa-se que o módulo de elasticidade transversal do concreto exerce uma influência bastante significativa. Percebe-se que a situação 02 proporciona uma resposta demasiadamente rígida na modelagem, tornando-a uma opção inviável para o modelo. Por outro lado, a situação 01 representa bem o início da fissuração, porém fornece respostas pouco rígidas após esse ponto, e com a previsão de uma carga de ruptura menor que a verificada experimentalmente. A situação 03 consegue representar de forma satisfatória o início da fissuração, mantendo proximidade com a curva experimental e boa precisão na previsão da carga de ruptura.

Cabe ressaltar que, apesar da utilização de uma abordagem isotrópica para prever a variação do módulo de elasticidade transversal do concreto (portanto mais simplificada que a adotada por outros autores a exemplo de Pituba [36], que utiliza um dano anisotrópico), verifica-se uma boa aproximação dos resultados numéricos com os resultados experimentais.

Partindo para a avaliação do resultado obtido para a situação 03, nota-se uma perda de rigidez no início da danificação, seguida de uma recuperação com posterior estabilização em relação ao resultado experimental. A simulação prosseguiu até o programa abortar, o que caracteriza a ausência de uma nova configuração de equilíbrio, ou seja colapso estrutural. Uma investigação mais detalhada da ruptura revelou que, de acordo com os resultados apresentados pelo programa, o escoamento da armadura teve início há uma carga (resultante) de 83,72 kN, e o colapso da estrutura ocorreu pela ruptura da armadura (deformação superior a 10%), com uma deformação do concreto da camada mais comprimida com valor de aproximadamente 0,002, o que caracteriza uma ruptura do tipo pouco armada para a laje. Portanto, pode-se concluir que os resultados obtidos para o presente caso foram satisfatórios, tanto do ponto de vista carga-deslocamento quanto da previsão do colapso.

A análise da influência do número de camadas na modelagem da laje também foi estudada e está apresentada na Figura 9: a espessura da laje foi simulada com 10, 15, 22 e 36 camadas. Pode ser

observado que a partir de 15 camadas não ocorreram alterações significativas nos resultados, sendo essa, portanto, a quantidade de camadas adotada para a modelagem deste tipo de laje.

Por fim, é apresentado na Figura 10, um comparativo do modelo proposto com os resultados apresentados por Jiang e Mirza [16], utilizando modelagem em Elementos Finitos com 4 (2 x 2) e 36 (6 x 6) elementos finitos. No modelo de [16] foi desenvolvido um modelo combinando o MEF, através de um elemento finito quadrilátero, com 20 graus de liberdade por elemento, a Teoria Clássica de Flexão de Placas e um modelo de plasticidade para o comportamento mecânico do concreto. O comparativo entre os resultados novamente evidencia a eficiência do modelo baseado no MDFE, tendo em vista que o modelo baseado no MEF e o baseado em MDFE apresentam convergência para um número próximo de graus de liberdade (245 e 243 graus de liberdade respectivamente).

4.2 Laje apoiada nos cantos com carga aplicada no centro

Neste exemplo foi simulado o comportamento carga-deslocamento no centro de uma laje ensaiada experimentalmente por McNeice [28], com as características mostradas na Figura 11 e na Tabela 1, onde estão também listados os parâmetros de dano utilizados na simulação. Para reger a variação do módulo de elasticidade transversal do concreto, foi aplicada a situação 3 apresentada no item anterior.

Mediante um estudo de convergência da solução, foi adotada uma discretização da laje em 14 x 14 subdivisões (15 x 15 trechos de integração). E quanto à discretização da espessura da laje esta foi modelada como um laminado de 10, 15, 22 e 36 camadas. Os resultados para o comparativo estão apresentados na Figura 12, onde se pode observar que, da mesma forma que no exemplo anterior, a partir de 15 camadas não houve alteração significativa nos resultados.

Na Figura 13 é apresentado o resultado numérico do modelo proposto em comparação com o resultado experimental e com resultados obtidos por Kratz e Polling [37]. Observa-se novamente uma perda de rigidez após a danificação, com posterior recuperação e ruptura coincidente com o observado experimentalmente. A este respeito, informa-se que na última condição de equilíbrio o aço encontrava-se em estágio de escoamento, com deformação da ordem de 0,0063, e o concreto comprimido com deformação máxima de 0,0057. Portanto, o colapso da estrutura aconteceu pelo esmagamento do concreto e escoamento do reforço, caracterizando uma ruptura de laje super armada.

Avaliando a trajetória de equilíbrio dos modelos numéricos já implementados para modelagem da laje de Mcneice [28], verifica-se na Figura 13 que o modelo proposto apresenta um comportamento mais aproximado do que outros modelos numéricos já testados. Crisfield [38] que desenvolveu o seu modelo a partir do MEF, utilizando elementos finitos retangulares, o critério de ruptura de Von Mises para modelar o concreto a compressão, e um modelo de amolecimento linear para seu comportamento à tração. Na Figura 14 também é apresentado o resultado encontrado por Doulah e Kabir [39] que combinaram a Teoria de Flexão de Placas de Mindlin, com um modelo de comportamento à tração para o concreto similar ao apresentado por Crisfield [38] e comportamento bi-linear à compressão, utilizando elementos finitos quadriláteros com oito nós por elemento e 4 graus de liberdade por nó. Zhang et al [17] também utilizaram o MEF em sua

modelagem, com elementos quadriláteros com 24 graus de liberdade por elemento, associados a Teoria de Flexão de Placas de Mindlin e Reissner. Para o concreto à compressão esses autores utilizaram o modelo de comportamento elástico perfeito, e para o concreto sob tração foi aplicado um modelo que leva em consideração o aparecimento de fissuras perpendiculares as direções principais após se atingir a tensão máxima de resistência à tração.

5. Conclusões

No presente artigo, visando prever de forma satisfatória a trajetória de equilíbrio de lajes sob flexão até a sua ruptura, foi apresentado um modelo de flexão de placas de concreto armado combinando a Teoria Clássica de Laminados, o modelo de dano isotrópico de Mazars, para modelar o concreto, e o comportamento elastoplástico perfeito, para descrever o aço das armaduras. Para validação do modelo foram utilizando os resultados experimentais de duas lajes de concreto armado sob flexão.

Os resultados obtidos apontaram que a redução do módulo de elasticidade transversal está associada ao dano ocasionado por tração (D_{CT}). Um segundo estudo, ligado a convergência da solução, indicou que 15 camadas são suficientes para garantir uma boa discretização da seção transversal das lajes. Finalmente, foi observado nas simulações numéricas utilizado o Método das Diferenças Finitas Energéticas que houve uma boa aproximação da trajetória de equilíbrio numérica com a experimental. Comparando-se com resultados numéricos do Método dos Elementos Finitos, realizados por outros autores, verifica-se que o MDFE apresentou melhor aproximação que os demais. Ressalta-se que os resultados foram obtidos a partir de uma discretização com poucas subdivisões da placa e poucas camadas o que destaca a eficiência computacional da associação entre o MDFE e o modelo teórico.

6. Agradecimentos

À SECTI/FAPESB e CNPq (PPP 010/2010) pelo apoio financeiro à pesquisa e à CAPES pela bolsa de estudos (Mestrado) destinada ao primeiro autor deste trabalho.

7. Referências bibliográficas

- [01] KURRER K-E., RAMM, E. The History of the Theory of Structures. From Arc Analysis to Computational Mechanics. John Wiley & Sons, 2008, 848pp.
- [02] THOMÉE, V.. From finite differences to finite elements: A short history of numerical analysis of partial differential equations. Journal of Computational and Applied Mathematics, vol. 128, 2001, p.1–54.
- [03] HAGIYA, H., MORISHITA, M., ANDO, T.; TANAKA, H. MATUO, K. Damage evaluation of reinforced concrete slabs subjected to contact detonation loads with numerical simulation. Science and technology of energetic materials, vol. 64, n. 5, 2003, p.192-200.
- [04] FERRETI, D. ;SAVOIA, M. Non-linear model for R/C tensile members strengthened by FRP-plates. Engineering Fracture Mechanics, vol. 70, 2003, p.1069–1083.
- [05] HABIB, A.; MOHARRAMI, H. Nonlinear sensitivity analysis of reinforced concrete frames, Finite Elements in Analysis and Design, vol. 46, 2010, p. 571–584.
- [06] VIRDI, K. S. Finite difference method for nonlinear analysis of structures, Journal of Constructional Steel Research, vol. 62, 2006, p. 1210–1218.
- [07] JONES, J., C. WUA,, D.J. OEHLERS , A.S. WHITTAKER , W. SUN, S. MARKS, R. COPPOLA. Finite difference analysis of simply supported RC slabs for blast loadings. Engineering Structures, vol. 31, 2009, p.2825-2832.
- [08] HOUBOLT, J.C. A Study of Several Aerothermoelastic Problems of Aircraft Structures in High-Speed Flight. Zurich, 1958, Doctoral Thesis - The Swiss Federal Institute of Technology.
- [09] GRIFFIN, D. S.; VARGA, R.S. Numerical solution of plane elasticity problems. Journal of Society of Industrial Applied Mathematic, vol. 11, n. 4, 1963.
- [10] BUSHNELL, D. Finite-difference energy models versus finite-element models- Two variational approaches in one computer program. Numerical and computer methods in structural mechanics.(A 74-17756 06-32) New York, Academic Press, Inc., 1973, p. 291-336
- [11] PLETZ, E. Análise de estrutura laminares pelo método da energia discretizada. Rio de Janeiro, 1983, Tese (Mestrado) - Universidade Federal do Rio de Janeiro.
- [12] NISHIKAWA, L. K. Análise numérica de placas com cantos reentrantes. Rio de Janeiro, 1991, Tese (Mestrado) - Universidade Federal do Rio de Janeiro.
- [13] GRAÇA, M. S. B. A. Método das diferenças finitas energéticas na análise estática e dinâmica de placas delgadas e espessas, Rio de Janeiro, 2000, Tese (Doutorado) - Universidade Federal do Rio de Janeiro.
- [14] LIMA, J. M. F. Estudo comparativo entre formulações geometricamente não lineares para a flexo-torção de hastes de paredes delgadas de seção aberta, Rio de Janeiro, 2004, Tese (Doutorado) - Universidade Federal do Rio de Janeiro.
- [15] NEVES, J. B; LIMA, J. M. F.; LIMA, P. R. L. Método das Diferenças Finitas Energéticas para simulação do comportamento sob flexão do concreto reforçado com fibras curtas de aço. Revista Sul-americana de Engenharia Estrutural, vol.10, n.2, 2013, p.31-55.
- [16] JIANG, J.; MIRZA, F. A. Nonlinear analysis of reinforced concrete slabs by a discret finite element approach. Computers & Structures, vol.65, n.4, 1997, p. 585-592.
- [17] ZHANG, Y. X.; BRADFORD, M. A.; GILBERT, R. I. A layered shear-flexural plate/shell element using Timoshenko beam functions for nonlinear analysis of reinforced concrete plates. Finite elements in analyses and design, vol.43, 2007; p.888-900.
- [18] MAZARS, J. A Description of micro and macroscale damage of concrete structures, Engineering Fracture Mechanics, vol.25, 1986; p.729-737.
- [19] FERNANDES, G. R. Método dos elementos de contorno aplicado à análise não linear de placas, São Paulo, 1998, Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos - Universidade de São Paulo.
- [20] CRESCE, S. H. Análise não-linear de pavimento de concreto armado pelo método de elementos de contorno, São Paulo, 2003, Tese (Doutorado) - Universidade de São Paulo.
- [21] BANDEIRA M. S. Análise não-linear de lajes de concreto armado pelo método dos elementos finitos, Goiás, 2006, Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás.

- [22] WANG, T.; HSU, T. Nonlinear finite element analysis of concrete structures using a new constitutive models. *Computer and structures*, vol. 19, 2001, p.2781-2791.
- [23] ASSAN, A.E., Nonlinear analysis of reinforced concrete cylindrical shells. *Computer and structures*, vol. 80, 2002, p.2177–2184.
- [24] HAIDO, J. BAKAR, B.H.; ABDUL-RAZZAK, A.A.; JAY-APRAKASH, J. Dynamic response simulation for reinforced concrete slabs. *Simulation Modelling Practice and Theory*, vol. 18, 2010, p.696–711.
- [25] SANCHES, F. J.; VENTURINI, W. S. Damage modeling of reinforced concrete beams. *Advances in Engineering Software*, vol.38, 2007, p.538-546.
- [26] LIMA, J.M.F.; NAGAHAMA. K.J.; LIMA, P.R.L.; SANTOS, G. J. B dos. Um modelo para análise não linear física da flexão de vigas de concreto armado. *Mecânica Computacional*, vol. XXIX, 2010, p.9839-9853.
- [27] TAYLOR, R.; MATHER, D. R. H.; HAYES, B. Effect of the arrangement of reinforcement on the behaviour of reinforced concrete slabs. *Magazine Concrete Research*, vol.18, 1966, p.85-94.
- [28] MCNEICE, G. M., Elastic-Plastic Bending of Plates and Slabs by the Finite Element Method, Ph. D. Thesis, London University, 1967.
- [29] NOH, H.C.. Nonlinear behavior and ultimate load bearing capacity of reinforced concrete natural draught cooling tower shell. *Engineering Structures*, vol. 28, 2006, p. 399–410.
- [30] OLIVEIRA, R.S.; RAMALHO, M.A.; CORREA, M.R.S. A layered finite element for reinforced concrete beams with bond–slip effects. *Cement & Concrete Composites*, vol. 30, 2008, p. 245–252.
- [31] GUAN, H.; COOPER, C.; LEE,, D-J. Ultimate strength analysis of normal and high strength concrete wall panels with varying opening configurations. *Engineering Structures*, vol. 32, 2010, p. 1341-1355.
- [32] JONES, R. M. *Mechanics of composite materials*. Taylor & Francis Group, 1999.
- [33] REDDY, J. N. *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and analysis*. CRC, 2004.
- [34] LEMAITRE, J.; MAZARS, J. Application de la théorie de l'endommagement au comportement non linéaire et à la rupture du béton de structure. *De l'institut technique Du bâtiment et dès travaux publics*, vol.401, 1982, p.114-137.
- [35] CHALLAMEL, N. A variationally based nonlocal damage model to predict diffuse microcracking evolution. *International Journal of Mechanical Sciences*, vol.52, 2010, p.1783-1800.
- [36] PITUBA, J. J. C. Avaliação de um modelo anisótropo de dano considerando a perda de resistência devido ao cisalhamento do concreto. *Asociación Argentina de Mecánica Computacional*, vol.29, 2010; p.5397-5410
- [37] KRATZIG, W.B., AND POLLING, R. An elasto-plastic damage model for reinforced concrete with minimum number of material parameters, *Computers and structures*, vol.82, n.15-16, 2004, p.1201-1215.
- [38] CRISFIELD, M. A. *Accelerated solution techniques and concrete cracking*. Her Majesty's Stationery Office, London, v. 33, pp. 585-607, 1981.
- [39] DOULAH, N.; KABIR, A. Non linear Finite Element analysis of reinforced concrete rectangular and skiw slabs. *Journal of Civil Engineering, Institutions of Engineers, Bangladesh*, v. 29, 2001.