

# Numerical analysis of reinforced concrete beams strengthened with high strength cement-based composite material

## *Análise numérica de vigas de concreto armado reforçadas por compósitos formados por fibras de alta resistência e argamassa de cimento*



C. M. PALIGA <sup>a</sup>  
charlei.paliga@ufpel.edu.br

M. V. REAL <sup>b</sup>  
mauroreal@furg.br

A. CAMPOS FILHO <sup>c</sup>  
americo@ufrgs.br

### Abstract

The use of composite materials based on polymeric resins and fiber as strengthening in concrete structures has been widely used. The use of carbon fiber reinforced polymers or other synthetic fibers is consolidated by its excellent characteristics, such as high strength, low weight, corrosion resistance, etc. This material in the form of sheets or laminates is bonded to the concrete substrate with epoxy-based adhesives. Although epoxy has proven to have excellent bonding and resistance performance, it has some disadvantages, such as low permeability, poor thermal compatibility with the base concrete, poor fire resistance, etc. Cement-based composite systems consisting of FRPs and a cementitious bonding agent can be used to prevent some of these problems. This study presents the numerical analysis, using a non-linear finite element model, of the structural behavior of reinforced concrete beams externally reinforced with a composite material made of high-strength synthetic fiber mesh and cementitious mortar. The numerical results were compared with experimental results reported in international journals, demonstrating the efficiency of the strengthening technique and the numerical model capacity.

**Keywords:** numerical analysis, ultra-high strength fiber meshes, cementitious mortar, structural strengthening.

### Resumo

A aplicação de materiais compósitos à base de resinas poliméricas e fibras no reforço de estruturas de concreto armado se tornou uma técnica bastante difundida nos últimos tempos. O uso dos compósitos reforçados com fibras de carbono, ou outros tipos de fibras sintéticas, se consolidou pelas suas excelentes características, tais como elevada resistência, baixo peso, resistência à corrosão, etc. Este material, na forma de lâminas ou laminados, é colado no substrato de concreto através de adesivos à base de epóxi. Apesar do uso do epóxi apresentar excelentes resultados em termos de colagem e resistência, algumas desvantagens podem ser citadas, tais como: baixa permeabilidade, baixa compatibilidade térmica em relação ao concreto, baixa resistência ao fogo, etc. Para evitar alguns desses problemas, um sistema compósito à base de tecidos ou malhas de fibras sintéticas coladas na superfície de concreto com argamassa de cimento pode ser usado. O objetivo deste trabalho é fazer uma análise numérica, através de um modelo não linear de elementos finitos, do comportamento estrutural de vigas de concreto armado reforçadas à flexão com compósitos baseados na combinação de tecidos de fibras sintéticas de alta resistência e argamassa de cimento. Os resultados numéricos são comparados aos resultados experimentais publicados em artigos técnicos internacionais, que demonstram a eficiência da técnica de reforço e a capacidade do modelo numérico.

**Palavras-chave:** análise numérica, fibras de alta resistência, argamassa de cimento, reforço estrutural.

<sup>a</sup> Universidade Federal de Pelotas, Departamento de Tecnologia da Construção, charlei.paliga@ufpel.edu.br, Rua Benjamin Constant 1359, Pelotas/RS, Brasil;

<sup>b</sup> Universidade Federal do Rio Grande, Escola de Engenharia, mauroreal@furg.br, Av. Itália km 8, Campus Carreiros, Rio Grande/RS, Brasil;

<sup>c</sup> Universidade Federal do Rio Grande do Sul, PPGEC, americo@ufrgs.br, Av. Osvaldo Aranha 99 – 3º andar, Porto Alegre/RS, Brasil.

## 1. Introdução

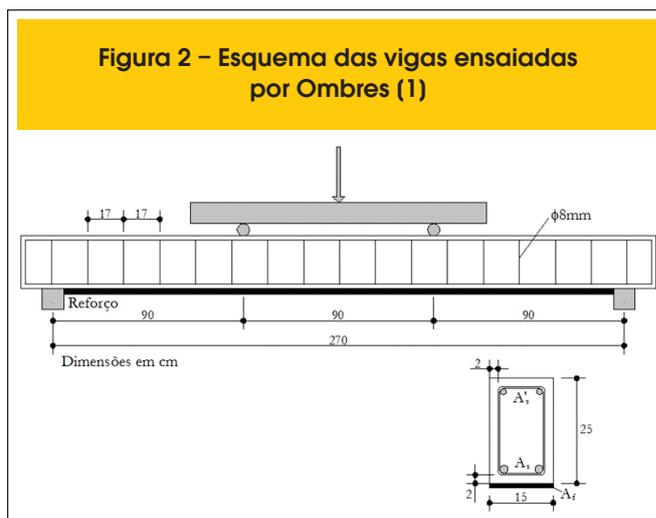
O uso dos materiais compósitos à base de fibras sintéticas de alta resistência tornou-se uma técnica de reforço/recuperação de estruturas de concreto armado muito difundida nos últimos anos. Tudo isso devido às suas excelentes propriedades, tais como baixo peso, elevada resistência mecânica, elevada resistência à corrosão, etc. Geralmente, os polímeros reforçados com fibras (PRF) estão presentes na forma de lâminas ou laminados colados nas superfícies das estruturas de concreto armado através de adesivos à base de epóxi, melhorando seu desempenho estrutural tanto em condições de serviço quanto sob cargas últimas.

Embora o uso dos adesivos à base de epóxi possa apresentar excelente comportamento em termos de aderência ao concreto e resistência mecânica, alguns problemas podem ser relacionados ao seu uso. As resinas epóxi possuem baixa permeabilidade, baixa compatibilidade térmica em relação ao concreto, baixa resistência ao fogo e susceptibilidade à radiação ultravioleta. Para evitar alguns desses problemas, um sistema compósito à base de tecidos ou malhas de fibras sintéticas coladas na superfície de concreto com argamassa de cimento pode ser usado (Ombres [1]). Diferentes soluções para este sistema podem ser citadas, tais como: concreto reforçado com material têxtil (TRC), argamassa reforçada com material têxtil (TRM), concreto reforçado com fibras (FRC) e tecido de fibras sintéticas em matriz cimentícia (FRCM). Di Tommaso et al. [2] e Aiello et al. [3] analisaram o comportamento de vigas de concreto armado reforçadas com FRCM composto por tecidos de fibras de carbono em matriz cimentícia. Os resultados da investigação mostraram a eficiência do sistema compósito tanto em termos de resistência, rigidez quanto em ductilidade. O sistema FRCM foi, recentemente, melhorado através do uso de malhas de fibras de Polypara-phenylene-benzo-bisthiazole (PBO). As propriedades mecânicas das fibras PBO são, de fato, bastante superiores às propriedades mecânicas dos tipos mais resistentes de fibras de carbono (Ombres [1]). Adicionalmente, elas têm grande tolerância ao impacto, capacidade de absorção de energia

Figura 1 – Tecido em malha de PBO



Figura 2 – Esquema das vigas ensaiadas por Ombres (1)



superior aos outros tipos de fibras, resistência ao fogo e compatibilidade química com argamassas de cimento (Wu et al. [4]).

O uso dos tecidos de fibras PBO (ver Figura 1) na confecção do sistema FRCM ainda está em investigação. Ensaios de vigas de concreto armado, reforçadas com tecidos de PBO, colados ao concreto com argamassa de cimento (PBO-FRCM), foram realizados recentemente. Análises experimentais com CFRP (polímeros reforçados com fibras de carbono), colados com adesivo epóxi e PBO-FRCM no reforço de vigas de concreto armado, foram feitas por Di Tommaso et al. [5]. Os resultados obtidos foram: (i) a falha à flexão das vigas reforçadas com PBO-FRCM foi mais dúctil em relação às vigas reforçadas com CFRP, devido à perda gradual da ação do compósito, relacionada ao grande deslizamento fibras/matriz cimentícia. (ii) nas vigas reforçadas com PBO-FRCM os mecanismos de falha, relacionados à perda da ação do reforço (descolamento), são governados pela interface concreto/matriz cimentícia, enquanto que para as vigas reforçadas com CFRP, a falha por descolamento é governada pelo cisalhamento da camada de cobertura de concreto, e (iii) PBO-FRCM provou ser eficaz se utilizado como reforço ao cisalhamento de vigas de concreto armado.

O objetivo deste trabalho é fazer uma análise numérica de vigas de concreto armado usando este novo tipo de material (PBO-FRCM) no reforço à flexão. O modelo numérico é baseado no método dos elementos finitos, sendo capaz de acompanhar a resposta estrutural desde o início do carregamento até a carga de ruptura. O modelo numérico também é capaz de prever modos de falha, sejam eles dúcteis, por alongamento excessivo da armadura de tração ou por rompimento do reforço, ou frágeis, por esmagamento do concreto ou por descolamento do reforço. Os resultados numéricos são comparados aos resultados experimentais apresentados em Ombres [1], que comprovam tanto a eficácia do material de reforço quanto às potencialidades do modelo numérico.

## 2. Caracterização das vigas ensaiadas

Os testes consistiram em ensaios de flexão de vigas simplesmente apoiadas, com duas cargas concentradas a 90cm dos apoios de extremidade. As vigas possuem 270cm entre apoios, com seção transversal retangular de 15x25cm (Figura 2). Duas séries de vigas denominadas  $S_1$  e  $S_2$  foram testadas. Na série  $S_1$ , a armadura tracionada,  $A_s$ , consiste de três barras de 12mm ( $3\phi 12$ mm), enquanto que

Tabela 1 – Propriedades mecânicas do tecido de PBO e da argamassa de cimento

	Espessura nominal (mm)	Módulo de elasticidade (GPa)	Resistência à tração (MPa)	Deformação máxima de tração (%)	Resistência à compressão (MPa)
Tecido de PBO	0,0455 (longitudinal) 0,0224 (transversal)	270	5.800	21,5	-
Argamassa	-	6	3,5	-	29

Tabela 2 – Quantidades de aço e reforço em cada série

Série	Número de camadas de reforço	$A_s$ (mm <sup>2</sup> )	$A'_s$ (mm <sup>2</sup> )	$A_i$ (mm <sup>2</sup> )	$\rho_s$ (%)	$\rho_i$ (%)
S <sub>1</sub>	1	339,30	157,00	6,75	0,905	0,018
	1	339,30	157,00	6,75	0,905	0,018
S <sub>2</sub>	1	157,00	100,53	6,75	0,419	0,018
	2	157,00	100,53	13,50	0,419	0,036
	3	157,00	100,53	20,25	0,419	0,054

a armadura comprimida, A's, de duas barras de 10mm (2Ø10mm). Na série S<sub>2</sub> a armadura tracionada é composta por duas barras de 10mm (2Ø10mm), enquanto que na armadura de compressão usou-se duas barras de 8mm (2Ø8mm). Para evitar a falha das vigas por cisalhamento, estribos de 8mm espaçados a cada 17cm foram usados (Ø8c.17). As vigas foram reforçadas com uma, duas ou três camadas de PBO-FRCM com largura de 15cm. As propriedades mecânicas do tecido de PBO estão apresentadas na Tabela 1.

Na Tabela 2 estão especificadas as taxas de armadura de tração, compressão e a taxa de reforço em cada uma das séries.

Durante o processo de fabricação das vigas, a cura se deu em temperatura ambiente, sendo que os protótipos foram reforçados após 30 dias da sua concretagem. Para garantir boas condições de aderência substrato de concreto/argamassa, o mesmo foi preparado com jatos de areia para remoção de pó de cimento, lavado com água e deixado em temperatura ambiente por alguns dias para sua secagem. Após a aplicação da primeira camada de argamassa no substrato de concreto, a primeira camada de tecido PBO foi aplicada e pressionada levemente dentro da argamassa. Foi aplicada, então, uma nova camada de argamassa cobrindo completamente o tecido

PBO e a operação foi repetida até que todas as camadas de reforço fossem aplicadas e cobertas pela argamassa (Ombres [1]).

As propriedades mecânicas do concreto foram determinadas quando transcorridos pelo menos 28 dias da concretagem, através de corpos de prova cúbicos ou cilíndricos. Os valores médios da resistência à compressão,  $f_{cm}$ , resistência à tração,  $f_{tm}$ , e módulo de elasticidade,  $E_{cm}$ , estão apresentados na Tabela 3. Na mesma tabela são mostrados os valores médios da resistência ao escoamento da armadura interna, determinados através de ensaios de corpos de prova padronizados (pelo menos três por diâmetro).

### 3. Modelo numérico de elementos finitos

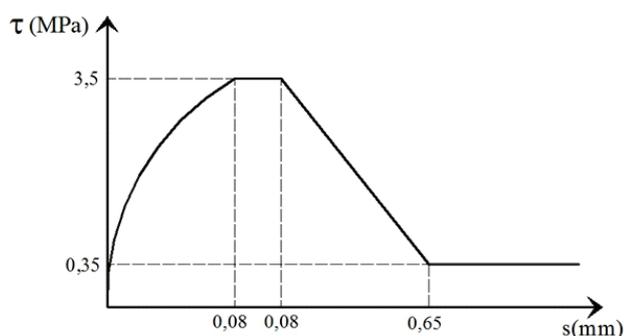
#### 3.1 Modelo para o concreto

O concreto é representado através de elementos finitos isoparamétricos bidimensionais, de oito nós, para estado plano de tensão. O modelo constitutivo bidimensional para o concreto é baseado no modelo proposto por Darwin e Pecknold [6], empregando-se o conceito de deformação uniaxial equivalente e o critério de ruptura bidimensional de Kupfer e

Tabela 3 – Propriedades dos materiais

Série	$f_{cm}$ (MPa)	$f_{tm}$ (MPa)	$E_{cm}$ (MPa)	Diâmetro da armadura (mm)	$f_{ym}$ (MPa)
S <sub>1</sub>	22,77 (c.v.=4,38%)	2,03	28.140	12	515,44
				10	521,89
S <sub>2</sub>	23,02 (c.v.=6,70%)	2,12	28.160	10	525,90
				8	535,60

Figura 3 – Modelo constitutivo para a interface concreto/reforço



Gerstle [7]. Para o concreto tracionado, após a fissuração, adota-se uma curva com amolecimento, para levar em conta a colaboração do concreto entre fissuras na resistência à tração (tension-stiffening).

### 3.2 Modelo para o aço

A armadura é representada através do modelo incorporado, com base no trabalho de Elwi e Hrudehy [8]. Cada barra de armadura é considerada como uma linha mais rígida dentro do elemento de concreto, que resiste apenas a esforços axiais. Admite-se aderência perfeita entre a armadura e o concreto que a envolve. Assim, a matriz de rigidez da armadura possui as mesmas dimensões que a do elemento de concreto. A equação constitutiva adotada para o aço é bilinear tanto em tração quanto em compressão.

### 3.3 Modelo para o reforço em material compósito

O material do reforço é modelado através de elementos discretos de barra de treliça plana, quadráticos, com três pontos nodais. O elemento é fixado ao restante da malha de elementos finitos

através de um elemento de interface. Estes materiais são modelados como um material de comportamento elástico linear até ser atingida a tensão de ruptura, e são capazes de absorver somente esforços de tração na direção do seu eixo longitudinal.

### 3.4 Modelo para a interface entre o substrato de concreto e o reforço

A transferência de esforços entre o sistema de reforço e o concreto gera tensões de cisalhamento na interface entre os dois materiais. Estas tensões podem levar ao descolamento prematuro do reforço e a consequente ruptura da estrutura com uma pequena mobilização de sua capacidade resistente, indicando o subaproveitamento do material. Para o cálculo do deslizamento entre o reforço e o concreto é usado um elemento de interface unidimensional, de seis nós, com funções quadráticas de interpolação conforme Adhikary e Mutsuyoshi [9]. O modelo constitutivo é o indicado pelo Código Modelo CEB-FIP 1990 [10], com os parâmetros da relação tensão de aderência( $\tau$ ) - deslizamento( $s$ ) obtidos por Silva [11] e mostrados na Figura 3.

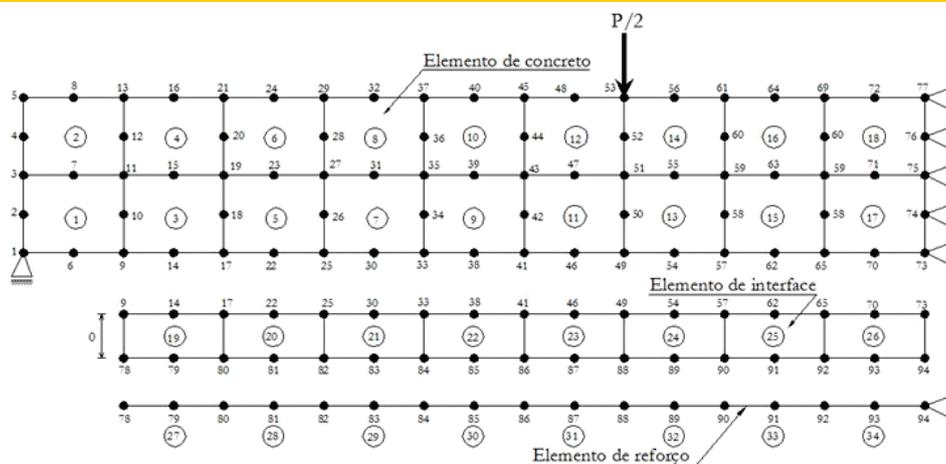
### 3.5 Malha de elementos finitos usada nas análises numéricas

Devido à simetria do carregamento, das propriedades mecânicas e da geometria das vigas, apenas a sua metade foi usada nas simulações numéricas. A malha de elementos finitos usada nas simulações numéricas está apresentada na Figura 4. O concreto foi discretizado através de dezoito elementos planos bidimensionais, enquanto que o reforço e a interface concreto/reforço foram discretizados através de oito elementos unidimensionais. Um maior detalhamento do modelo de elementos finitos usado nas simulações numéricas pode ser encontrado em Paliga et al. [12].

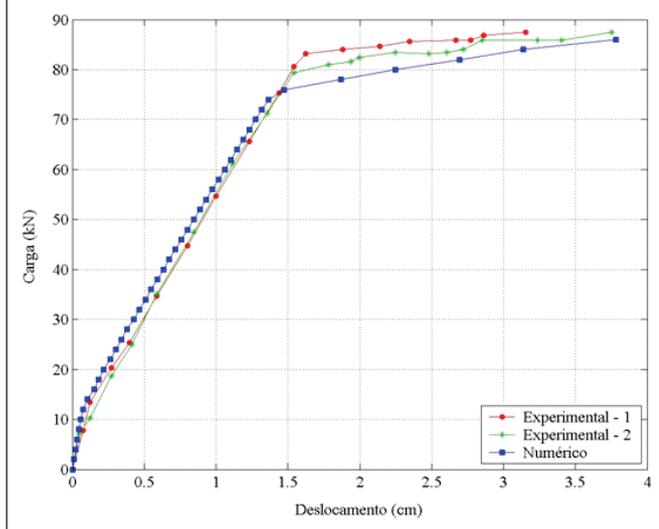
## 4. Resultados obtidos

Os resultados obtidos através das simulações numéricas são,

Figura 4 – Discretização das vigas em elementos finitos

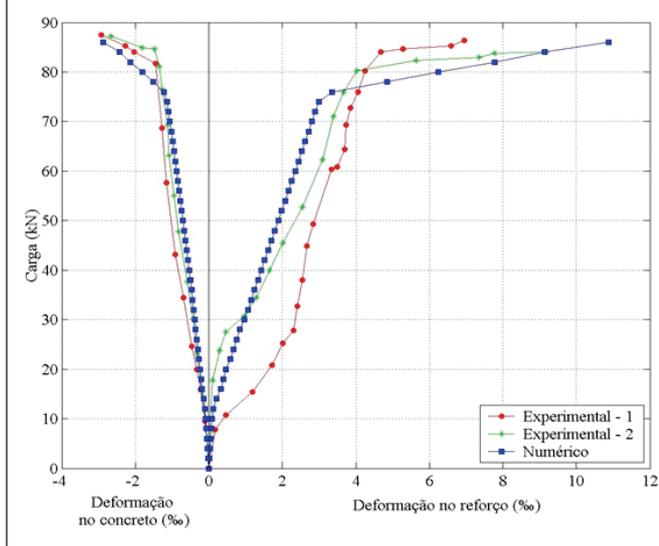


**Figura 5 – Curvas carga x deslocamento (nó 73 – Figura 4) para a Série  $S_1$**



neste item, apresentados, discutidos e comparados aos resultados obtidos no programa experimental (Ombres[1]). Cabe-se ressaltar que o modelo de elementos finitos é capaz de acompanhar o desempenho das vigas desde o início do carregamento até a carga de ruptura. Da mesma maneira, o modelo numérico é capaz de detectar o modo de falha das vigas, seja ele dúctil, por alongamento excessivo da armadura tracionada ou por ruptura por tração do material de reforço, ou frágil, causado pelo esmagamento do concreto comprimido ou por descolamento do reforço.

**Figura 6 – Curvas carga x deformação no centro do vão para a Série  $S_1$**



#### 4.1 Série $S_1$

Nesta série, duas vigas foram armadas com taxa de armadura de tração de 0,905% ( $3\phi 12\text{mm}$ ), de compressão igual a 0,419% ( $2\phi 10\text{mm}$ ) e taxa de reforço de 0,018% (uma camada de  $6,75\text{mm}^2$ ). Segundo Ombres [1], a carga de ruptura do primeiro protótipo foi de 87,42kN, com ruptura causada pelo esmagamento do concreto. Para o segundo protótipo, a ruptura se deu pelo esmagamento do concreto, sob uma carga última de 87,60kN. A carga de ruptura obtida através do modelo numérico foi de 86,25kN, estabelecendo uma diferença média de -1,4% em relação aos valores experimentais. Na Figura 5 são apresentadas as curvas carga x deslocamento obtidas experimentalmente e é feita a comparação com o desempenho da viga obtido numericamente.

Na Figura 6 estão comparados os valores obtidos experimentalmente e numericamente para a deformação de compressão no concreto (ponto de integração próximo ao nó 77) e para a máxima deformação de tração no reforço (ponto de integração próximo ao nó 94).

#### 4.2 Série $S_2$

Nesta série, as três vigas simuladas numericamente foram armadas com taxa de armadura de tração de 0,419% ( $2\phi 10\text{mm}$ ), de compressão igual a 0,268% ( $2\phi 8\text{mm}$ ) e taxa de reforço de 0,018% (uma camada de  $6,75\text{mm}^2$ ), 0,036% (duas camadas de  $13,5\text{mm}^2$ ) e 0,054% (três camadas de  $20,25\text{mm}^2$ ).

##### 4.2.1 Viga reforçada com uma camada de PBO-FRCM

Segundo Ombres [1], a ruptura da viga reforçada com uma camada de PBO-FRCM ocorreu para uma carga de 54,24kN e foi causada pelo esmagamento do concreto. A carga de ruptura, obtida numericamente através do modelo de elementos finitos, foi de 52,25kN, estabelecendo uma diferença de -3,7% em relação ao valor experimental.

**Figura 7 – Curvas carga x deslocamento (nó 73 – Figura 4) para a Série  $S_2$  – uma camada**

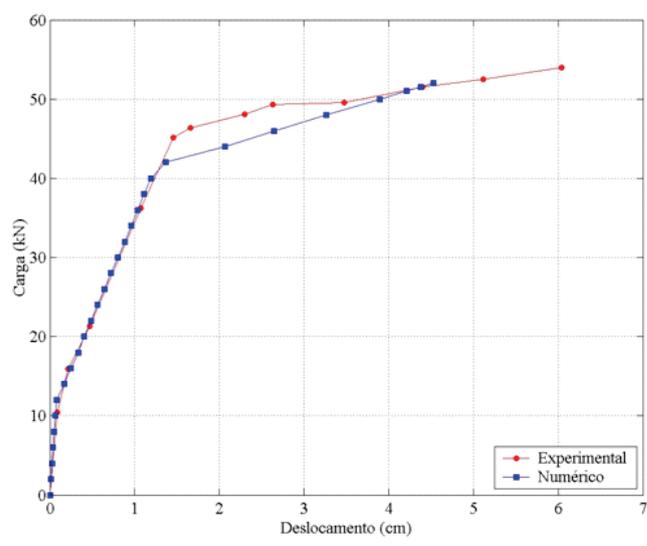
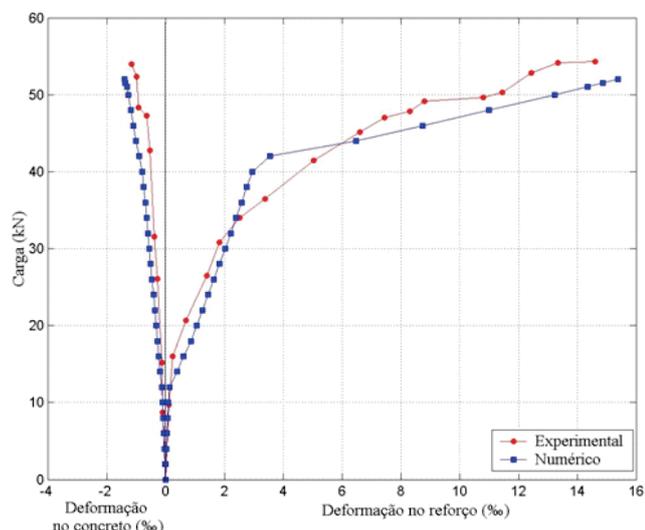


Figura 8 – Curvas carga x deformação no centro do vão para a Série S<sub>2</sub> – uma camada



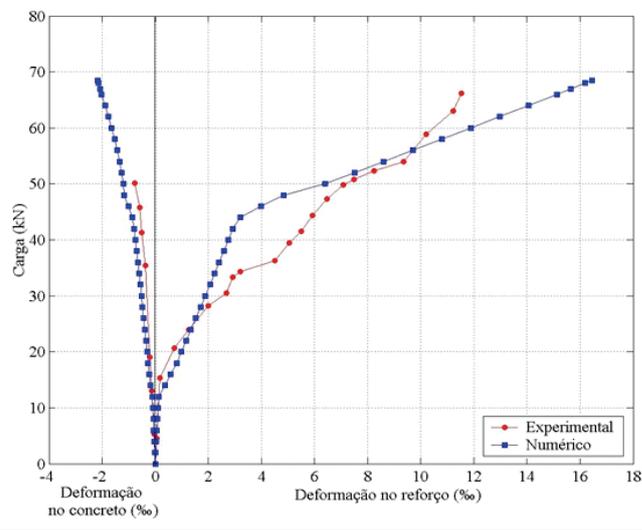
Na Figura 7 são apresentadas as curvas carga x deslocamento obtidas experimentalmente e numericamente.

Na Figura 8 estão comparados os valores obtidos experimentalmente e numericamente para a deformação de compressão no concreto (ponto de integração próximo ao nó 77) e para a máxima deformação de tração no reforço (ponto de integração próximo ao nó 94).

#### 4.2.2 Viga reforçada com duas camadas de PBO-FRCM

Segundo Ombres [1], a carga de ruptura da viga reforçada com

Figura 10 – Curvas carga x deformação no centro do vão para a Série S<sub>2</sub> – duas camadas



duas camadas de PBO-FRCM foi de 66,00kN, com ruptura causada pelo descolamento do sistema de reforço em relação ao substrato de concreto. A carga de ruptura obtida numericamente através do modelo de elementos finitos foi de 68,75kN, estabelecendo uma diferença de +4,2% em relação ao valor experimental. Na Figura 9 são apresentadas as curvas carga x deslocamento obtidas experimentalmente e numericamente.

Através da Figura 10 podem ser comparados os valores obtidos experimentalmente e numericamente para a deformação de compressão no concreto (ponto de integração próximo ao nó 77) e para a máxima deformação de tração no reforço (ponto de integração próximo ao nó 94).

Figura 9 – Curvas carga x deslocamento (nó 73 – Figura 4) para a Série S<sub>2</sub> – duas camadas

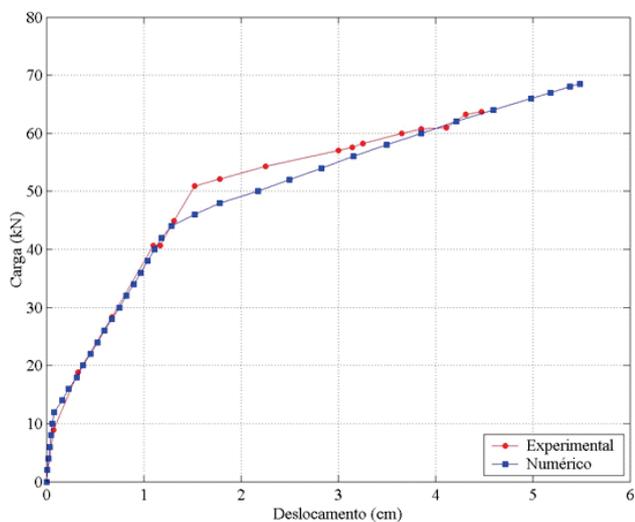
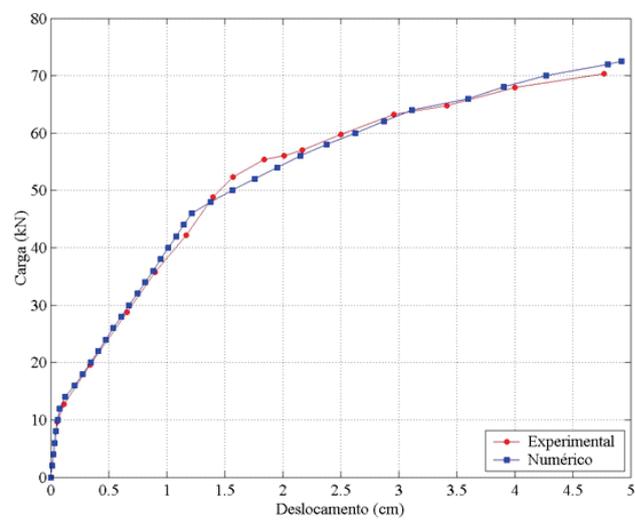
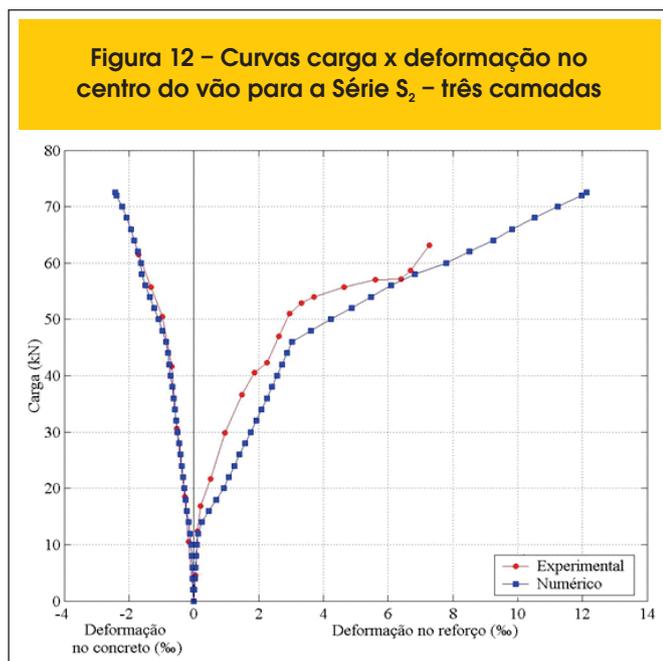


Figura 11 – Curvas carga x deslocamento (nó 73 – Figura 4) para a Série S<sub>2</sub> – três camadas



**Figura 12 – Curvas carga x deformação no centro do vão para a Série  $S_2$  – três camadas**

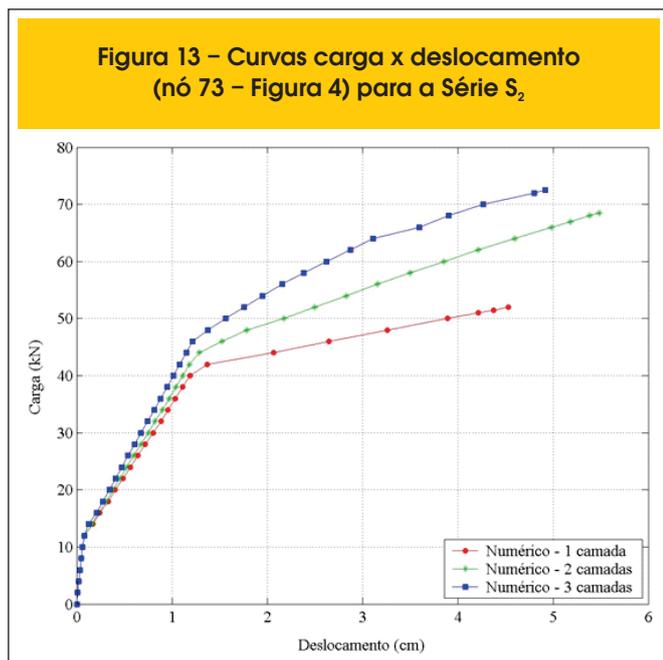


#### 4.2.3 Viga reforçada com três camadas de PBO-FRCM

Segundo Ombres [1], a carga de ruptura da viga reforçada com três camadas de PBO-FRCM foi de 71,39kN, com ruptura causada pelo descolamento do sistema de reforço em relação ao substrato de concreto. A carga de ruptura obtida numericamente através do modelo de elementos finitos foi de 72,75kN, estabelecendo uma diferença de +1,90% em relação ao valor experimental.

Na Figura 11 são apresentadas as curvas carga x deslocamento obtidas experimentalmente e numericamente. Através da Figura 12 podem ser comparados os valores obtidos experimentalmente

**Figura 13 – Curvas carga x deslocamento (nó 73 – Figura 4) para a Série  $S_2$**



e numericamente para a variação da deformação de compressão no concreto (ponto de integração próximo ao nó 77) e para a máxima deformação de tração no reforço (ponto de integração próximo ao nó 94) conforme o aumento da carga aplicada.

#### 4.3 Discussão dos resultados obtidos

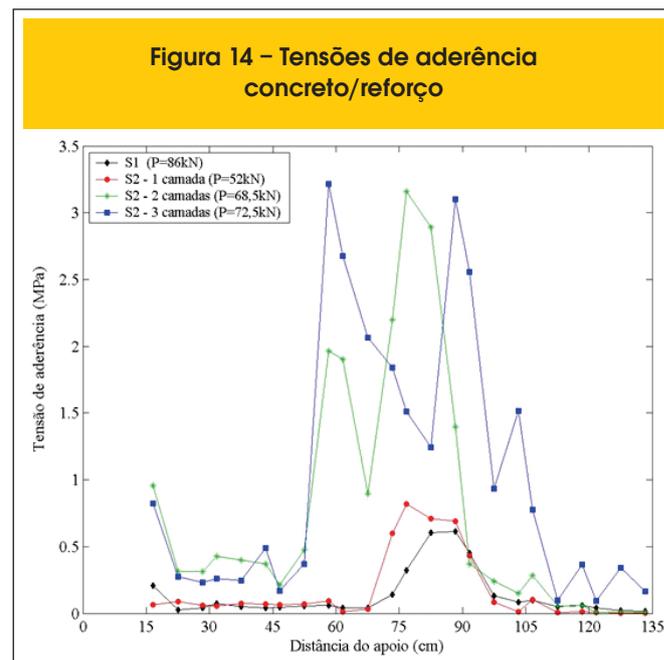
Na Figura 13 podem ser observados os comportamentos das três vigas analisadas numericamente na série  $S_2$ , em termos de deslocamentos máximos, conforme o aumento das cargas aplicadas. Verifica-se a eficácia do sistema de reforço, devido ao aumento nas cargas de ruptura, conforme o aumento no número de camadas de reforço. Também, que as vigas apresentam níveis de ductilidade satisfatórios. Na viga que a ruptura se deu por esmagamento do concreto (uma camada), o mesmo se deu após o escoamento da armadura tracionada.

Fazendo-se uma análise do comportamento das vigas reforçadas, nota-se que a maior influência da taxa de reforço se dá após o escoamento da armadura interna tracionada, quando realmente se mobiliza a capacidade resistente do reforço.

É importante observar que houve um aumento de resistência de aproximadamente 32% da viga reforçada com duas camadas de PRO-FRCM em relação à viga reforçada com uma camada de PBO-FRCM. Comparando-se o aumento de resistência da viga reforçada com três camadas em relação à reforçada com duas camadas o acréscimo foi de aproximadamente 6%. Percebe-se, desta forma, que o aumento de 50% da área de reforço (13,5mm<sup>2</sup> para 20,25mm<sup>2</sup>) contribuiu muito pouco para o aumento de resistência da viga. Isso é facilmente explicado pelo fato do modo de ruptura destas vigas ser o descolamento do sistema de reforço, chegando-se a conclusão que o aumento de camadas de reforço pode levar a ruptura prematura das vigas por descolamento do reforço, com subaproveitamento da capacidade resistente do material.

Na Figura 14 são apresentadas as variações das tensões de aderência ao longo da interface concreto/reforço, obtidas nume-

**Figura 14 – Tensões de aderência concreto/reforço**



ricamente, para a última etapa de carga antes da ruptura das vigas das séries  $S_1$  e  $S_2$ . Observa-se um baixo nível de tensões de aderência concreto/reforço para as vigas reforçadas com uma camada de PBO-FRCM ( $S_1$  e  $S_2$  – uma camada) antes da ruptura das mesmas, indicando que o modo de falha não possui natureza frágil causada pelo descolando do reforço em relação ao substrato de concreto. Para as vigas reforçadas com duas e três camadas de PBO-FRCM, observou-se elevados níveis de tensões de aderência antes que as mesmas atingissem o colapso. Estes picos de tensão, localizados em uma faixa entre 58cm e 90cm de distância do apoio, ficaram muito próximos da resistência da ligação entre o concreto e o material de reforço, indicando rupturas causadas pelo descolamento do reforço. Desta forma, os modos de ruptura encontrados numericamente vão ao encontro dos modos de ruptura obtidos nos ensaios experimentais.

## 5. Conclusões

O desempenho estrutural de vigas de concreto armado reforçadas com um sistema de alta performance composto por fibras de altíssima resistência em matriz cimentícia (PBO-FRCM) foi analisado numericamente neste trabalho. Obtidos os resultados mostrados acima, podem-se estabelecer as conclusões apresentadas abaixo. O modelo de elementos finitos usado nas simulações numéricas se mostrou uma ferramenta valiosa para análise deste tipo de problema. A comprovação da eficiência se deu pela comparação aos valores experimentais apresentados em Ombres [1]. Mesmo com diferentes modos de falha, o modelo computacional chegou a uma aproximação média de 2,8% para as cargas de ruptura em relação aos valores obtidos no programa experimental.

O uso do sistema PBO-FRCM apresentou sensível melhora na capacidade resistente à flexão de vigas de concreto armado. Os resultados mostraram um aumento de aproximadamente 39% na capacidade de carga com o acréscimo de material de reforço (52,25kN para 72,75kN). Entretanto, o aumento na taxa de reforço pode conduzir a ruptura da viga por descolamento do reforço. Este tipo de ruptura pode levar a um subaproveitamento do material de reforço, pois se impede que o mesmo seja submetido às deformações máximas. Tal fato é comprovado pelo aumento de aproximadamente 6% na carga de ruptura da viga reforçada com três camadas ( $A_f=20,25\text{mm}^2$  –  $P_u=72,75\text{kN}$ ) em relação à reforçada com duas camadas ( $A_f=13,50\text{mm}^2$  –  $P_u=68,75\text{kN}$ ). Segundo Ombres[1], o modo de ruptura destas duas vigas foi o descolamento do material de reforço em relação ao substrato de concreto. A ductilidade das vigas se mostrou satisfatória. Mesmo os casos de ruptura por esmagamento do concreto, o mesmo se deu após o escoamento da armadura interna tracionada.

A maior influência da taxa de reforço na rigidez das vigas se dá após o escoamento da armadura interna de tração (Figura 13). Antes da fissuração do concreto, não há nenhuma influência da taxa de reforço no comportamento das vigas, pois este depende quase que totalmente da rigidez da seção de concreto armado ainda intacta. Após a carga de fissuração há um mínimo aumento de rigidez com o aumento do número de camadas, onde existe uma maior dependência da armadura tracionada. Após o escoamento da armadura de tração passa-se a depender quase que exclusivamente do material de reforço. Desta forma, observa-se um significativo aumento de rigidez com o aumento da área de reforço. Quando os modos prematuros de ruptura são evitados, modelos

simples usualmente adotados na previsão de resistência são capazes de aproximações bastante precisas. Entretanto, quando existe a possibilidade de descolamento de reforço, modelos mais sofisticados devem ser usados para previsões realistas da capacidade resistente de vigas reforçadas. Desta forma, modelos numéricos baseados no método dos elementos finitos são ferramentas bastante valiosas na análise deste tipo de problema.

## 6. Referências bibliográficas

- [01] OMBRES, L. Flexural analysis of reinforced concrete beams strengthened with a cement based high strength composite material. *Composite Structures*, v.94, Dec, 2011; p.143-155.
- [02] DI TOMMASO, A.; FOCACCI, F.; MANTEGAZZA, G. Rinforzo a flessione di travi in calcestruzzo armato con reti di carbonio e matrice cementizia. In: *Proceedings of the national AICAP conference*. Italy, 2004.
- [03] AIELLO, M. A.; LEONE, M.; OMBRES, L. Structural analysis of reinforced concrete beams strengthened with externally bonded FRP (fiber reinforced polymers) sheets. In: *Proceedings of the third international conference on "composites in constructions"*, Lyon, France, 2005, p.11-8.
- [04] WU, Z. S.; IWASHITA, K.; HIGUCHI, T.; MURAKAMI, S.; KOSEKI, Y. Strengthening PC structures with externally prestressed PBO fiber sheets. In: *Proceeding of the international conference on FRP composites in civil engineering*, Honk Hong, 2001, p.1085-92.
- [05] DI TOMMASO, A.; FOCACCI, F.; MANTEGAZZA, G.; GATTI, A.. FRCM versus FRP composites to strengthen RC beams: a comparative analysis. In: *Proceedings of the international symposium on fibre reinforced polymers for reinforced concrete structures (FRPRCS8)*. Patras, Greece, 2007.
- [06] DARWIN, D.; PECKNOLD, D. A. Nonlinear biaxial stress-strain law for concrete. *Journal of Engineering Mechanics Division*, v.103, 1977; p.229-241.
- [07] KUPFER, H. B.; GERSTLE, K. H. Behavior of concrete under biaxial stresses. *Journal of Engineering Mechanics*, v.99, 1973; p.853-866.
- [08] ELWI, A. E.; HRUDEY, T. M. Finite element model for curved embedded reinforcement. *Journal of Engineering Mechanics Division*, v.115, 1989; p.740-745.
- [09] ADHIKARY, B. B.; MUTSUYOSHI, H. Numerical simulation of steel-plate strengthened concrete beam by a non-linear finite element method model. *Construction and Building Materials*, v.16, 2002; p.291-301.
- [10] COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BÉTON. CEB-FIP Model Code 1990. London, Thomas Telford, 1993.
- [11] SILVA, P.A.S.C.M. Modelação e análise de estruturas de betão reforçadas com FRP, Porto, 1999, Dissertação (mestrado) - Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, 254 p.
- [12] PALIGA, C. M.; CAMPOS FILHO, A.; REAL, M. V. Finite element model for numerical analysis of strengthened reinforced concrete structures. *IBRACON Structural Journal*. v.3, 2007; p.177-200.