

Numerical analysis of steel-fiber-reinforced concrete beams using damage mechanics

Análise numérica de vigas de concreto com fibras de aço utilizando mecânica do dano

W. M. PEREIRA JUNIOR^a
w.junioreng@gmail.com

D. L. ARAÚJO^b
araujodl@terra.com.br

J. J. C. PITUBA^b
jjpituba@yahoo.com.br

Abstract

This work deals with numerical modeling of the mechanical behavior of steel-fiber-reinforced concrete beams using a constitutive model based on damage mechanics. Initially, the formulation of the damage model is presented. The concrete is assumed to be an initial elastic isotropic medium presenting anisotropy, permanent strains, and bimodularity induced by damage evolution. In order to take into account the contribution of the steel fiber to the mechanical behavior of the media, a homogenization procedure is employed. Finally, numerical analyses of steel-fiber-reinforced concrete beams submitted to bending loading are performed in order to show the good performance of the model and its potential.

Keywords: damage mechanics, steel-fiber-reinforced concrete beams, constitutive model, concrete.

Resumo

O artigo trata de uma contribuição à modelagem numérica do comportamento mecânico de vigas de concreto armado reforçado com fibras de aço utilizando modelos constitutivos baseados na Mecânica do Dano. O mesmo apresenta a formulação de um modelo de Dano proposto que admite o concreto como material inicialmente isotrópico e elástico, mas com a evolução do processo de danificação, exibe deformações plásticas, anisotropia e bimodularidade induzidas pelo dano. A incorporação das fibras na modelagem é efetuada por meio de um procedimento de homogeneização. Por fim, análises numéricas de vigas de concreto armado reforçado com fibras de aço sujeitas à flexão são realizadas com o objetivo de avaliar a aplicabilidade da modelagem proposta.

Palavras-chave: mecânica do dano, vigas de concreto reforçado com fibras de aço, modelo constitutivo, concreto.

^a Pontifícia Universidade Católica de Goiás, Goiânia, GO, Brasil;
^b Universidade Federal de Goiás, Goiânia, GO, Brasil.

1. Introdução

Todo sistema mecânico quando submetido a carregamentos, sejam eles estáticos ou dinâmicos, ou de natureza térmica, apresenta uma resposta. Contudo, prevê-la neste sistema mecânico pode tornar a análise muito complexa, pois ela está ligada diretamente com a lei constitutiva do material que faz parte de seus componentes em análise. Dentre alguns trabalhos relacionados a diferentes modelos constitutivos para análise de sistemas mecânicos compostos por concreto, podem ser citados alguns bastante difundidos como em [1], [2] e [3]. No âmbito das ferramentas numéricas utilizadas na mecânica computacional destaca-se a Mecânica do Dano Contínuo (MDC) devido ao fato de apresentar bons resultados para as respostas de sistemas mecânicos compostos por materiais complexos como o concreto. Em meio aos trabalhos pioneiros na área destaca-se o trabalho proposto por La Borderie [4], no qual há uma proposta de regra de homogeneização com um modelo de dano para concreto reforçado com fibras para determinação da tensão corrigida na matriz compósita.

Já Li e Li [5] estudaram a aplicação de modelos de dano para análise de concreto com fibras na situação de tração. Naquele trabalho, o concreto possuía a característica de endurecimento com incrementos de deformação, demonstrando bons resultados quando comparados às análises experimentais. O mesmo pode ser dito do trabalho proposto por Lee e Liang [6], porém aplicando a MDC para o concreto celular reforçado com fibras.

Por outro lado, Hameed e colaboradores [7] utilizaram mecânica do dano para modelar vigas de concreto reforçado com fibras de aço, obtendo resultados satisfatórios quando comparado aos testes experimentais. Pasa [8] avaliou o comportamento mecânico do concreto reforçado com fibras de aço por meio do método dos elementos finitos utilizando modelos constitutivos e fissuração distribuída.

Segundo Guello [9], o comportamento não linear do concreto, que se dá mesmo em baixos níveis de tensão, é influenciado pela microfissuração inicial e pela sua propagação durante o processo de carregamento. Logo, pode-se perceber a importância de um modelo de fissuração que se aproxime da realidade. Porém, no âmbito dos materiais aprimorados para uso estrutural, destaca-se o concreto reforçado com fibras de aço, que mitiga esse efeito de fragilidade ao efeito da tração, permitindo que o concreto com esse reforço na matriz cimentícia tenha sua capacidade de deformação melhorada pelo efeito de grampeamento das fissuras proporcionado pelas fibras. De acordo com [18], a influência da adição de fibras de aço em concretos e argamassas na resistência à flexão é muito maior que nas resistências à tração direta e à compressão.

Este trabalho tem o objetivo de apresentar uma proposta de modelagem do comportamento mecânico do concreto com fibras utilizando o modelo de Pituba e Fernandes [3], o qual já foi testado em estruturas de concreto convencional. A versão unidimensional desta proposta de modelagem é apresentada e empregada na análise de vigas de concreto reforçado com fibras de modo a balizar uma discussão sobre a viabilidade e limitações de emprego em análises numéricas simplificadas da Engenharia Estrutural.

2. Modelo computacional utilizado

2.1 Modelo das armaduras

Neste trabalho foi utilizado um modelo unidimensional para descri-

ção do comportamento mecânico da armadura no concreto, a qual contribui apenas com os esforços axiais atuantes na estrutura. A área de aço é transformada numa área disposta como uma camada posicionada segundo seu baricentro (ver Figura 1) O aço, aqui representado em seu modelo elasto-plástico, possui comportamento equivalente em regime de tração e compressão. Adota-se, então, um diagrama bilinear para representação do comportamento tensão versus deformação.

2.2 Modelo de dano para concreto

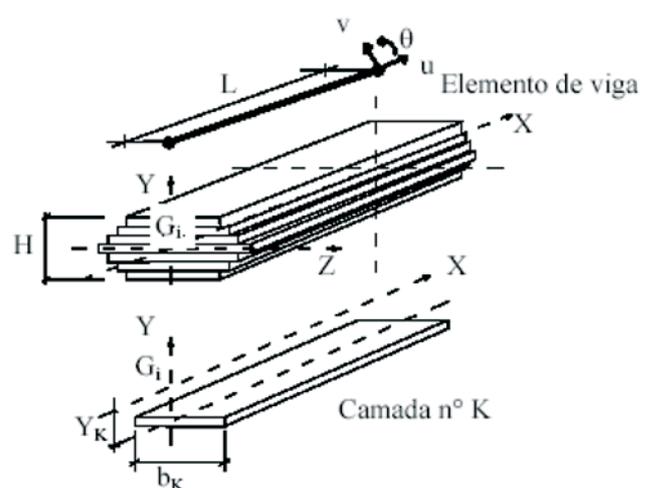
O concreto é aqui considerado como um material que pertence à categoria dos meios inicialmente isotrópicos que passam a apresentar isotropia transversal e resposta bimodular induzidas pelo dano. A formulação do modelo para o concreto tem por base o princípio de equivalência de energia e o formalismo é apresentado por Pituba e Fernandes [3].

No que segue, o modelo proposto por [3] é descrito brevemente neste trabalho, iniciando pela apresentação do tensor de dano para estados predominantes de tração, cuja expressão é dada na forma:

$$\mathbf{D}_T = f_1(D_1, D_4, D_5) (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}) + 2 f_2(D_4, D_5) [(\mathbf{A} \otimes \mathbf{I} + \mathbf{I} \otimes \mathbf{A}) - (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A})] \quad (1)$$

sendo $f_1(D_1, D_4, D_5) = D_1 - 2 f_2(D_4, D_5)$ e $f_2(D_4, D_5) = 1 - (1-D_4)(1-D_5)$. O tensor de dano apresenta duas variáveis escalares na sua composição (D_1 e D_4) e uma terceira variável escalar de dano, D_5 , ativada somente se ocorrer compressão prévia com danificação correspondente. A variável D_1 representa a danificação na direção perpendicular ao plano local de isotropia transversal do material

Figura 1 - Elemento finito empregado no código computacional de Pituba (10)



e D_4 é a variável representativa da danificação gerada pelo cisalhamento entre as bordas das fissuras pertencentes àquele plano. Na Eq. (1), o tensor I é o tensor identidade de segunda ordem e o tensor A é, por definição, formado pelo produto tensorial do versor perpendicular ao plano de isotropia transversal por ele mesmo. As operações de produtos tensoriais entre os tensores de segunda ordem I e A que aparecem na Eq. (1) estão descritas em [3]. Para estados predominantes de compressão, o tensor de dano é dado pela relação:

$$D_c = f_1(D_2, D_4, D_5) (A \otimes A) + f_2(D_3) [(I \otimes I) - (A \otimes A)] + 2f_3(D_4, D_5) [(A \otimes I + I \otimes A) - (A \otimes A)] \quad (2)$$

sendo $f_1(D_2, D_4, D_5) = D_2 - 2 f_3(D_4, D_5)$, $f_2(D_3) = D_3$ e $f_3(D_4, D_5) = 1 - (1-D_4)(1-D_5)$.

Notam-se três variáveis escalares na sua composição: D_2 , D_3 e D_5 , além de D_4 , relacionada a efeitos de tração pré-existent. A variável D_2 (danificação perpendicular ao plano local de isotropia transversal do material) penaliza o módulo de elasticidade nessa direção e juntamente com D_3 (representante da danificação no plano de isotropia transversal) penaliza o coeficiente de Poisson em planos perpendiculares ao de isotropia transversal.

Finalmente, os tensores constitutivos resultantes são descritos por:

$$E_T = \lambda_{11} [I \otimes I] + 2\mu_1 [I \otimes I] - \lambda_{22}^+(D_1, D_4, D_5) [A \otimes A] - \lambda_{12}^+(D_1) [A \cdot I + I \cdot A] - \mu_2(D_4, D_5) [A \otimes I + I \otimes A] \quad (3)$$

$$E_c = \lambda_{11} [I \otimes I] + 2\mu_1 [I \otimes I] - \lambda_{22}^-(D_2, D_3, D_4, D_5) [A \otimes A] - \lambda_{12}^-(D_1, D_3) [A \cdot I + I \cdot A] - \lambda_{11}^-(D_3) [I \cdot I] - \frac{(12)}{v_0} \lambda_{11}^-(D) [I \otimes I] - \mu_2(D_4, D_5) [A \otimes I + I \otimes A] \quad (4)$$

onde $\lambda_{11} = \sigma_0$ e $\mu_1 = \mu_0$. Os outros parâmetros só existem para dano não-nulo, evidenciando dessa forma a anisotropia e bimodularidade induzidas pelo dano, e são definidos por:

$$\lambda_{22}^+(D_1, D_4, D_5) = (\lambda_0 + 2\mu_0)(2D_1 - D_1^2) - 2\lambda_{12}^+(D_1) - 2\mu_2(D_4, D_5) \lambda_{12}^+(D_1) = \lambda_0 D_1, \mu_2(D_4, D_5) = 2\mu_0 [1 - (1 - D_4)^2 (1 - D_5)^2] + \frac{(v_0 - 1)}{v_0} \lambda_{11}^-(D_3) - 2\mu_2(D_4, D_5) \quad (5)$$

$$\lambda_{12}^-(D_2, D_3) = \lambda_0 [(1 - D_3)^2 - (1 - D_2)(1 - D_3)] \quad (6)$$

$$\lambda_{11}^-(D_3) = \lambda_0 (2D_3 - D_3^2); \mu_2(D_4, D_5) = 2\mu_0 [1 - (1 - D_4)^2 (1 - D_5)^2] \quad (7)$$

O modelo trabalha ainda com a definição de um hiperplano separador no espaço das deformações de modo a determinar se o estado de deformação está em um regime predominante de compressão ou de tração. Além disso, há também a definição de critérios de início e de evolução dos processos de danificação. Maiores detalhes encontram-se em Pituba e Fernandes [3].

O modelo de dano foi implementado em um código computacional baseado no Método dos Elementos Finitos de barra com seção transversal estratificada para a análise numérica de estruturas em barras discretizadas com seção transversal estratificada (Figura 1), permitindo assim colocar na seção transversal camadas equivalentes de aço ou concreto. Aderência perfeita entre concreto e aço é admitida na modelagem. Também são atribuídas características específicas de cada camada, tais como: módulo de elasticidade e deformações anelásticas equivalentes, utilizando regra de homogeneização para tal fim (vide [3]).

O modelo proposto por [3] não contabilizava valores de deformações permanentes, ou seja, para situações de descarregamento o modelo recupera totalmente o valor de deformação na peça. Porém, isto não ocorre em situações reais de carregamento e descarregamento. Logo, se essas deformações permanentes não forem desprezíveis, elas devem ser consideradas para aproximação da realidade em situações de descarregamento.

De fato, as deformações anelásticas e a danificação evoluem simultaneamente. Segundo La Borderie [4], a microfissuração e a existência de vazios no material estão na origem dos dois fenômenos. Por um lado os microvazios são uma causa para as deformações anelásticas, pois impedem que as microfissuras fechem totalmente num processo de descarregamento. Por outro lado, nota-se numa microfissura que suas faces são irregulares, sendo esta outra razão para a dificuldade do seu fechamento total.

Como critério geral, admite-se que as deformações residuais surjam após o início da danificação. A proposta aqui apresentada limita-se apenas aos casos uniaxiais do modelo de [3], pois se tratando de um modelo de dano com anisotropia induzida, as deformações plásticas em estados mais complexos de solitação devem ser melhor avaliadas.

Nesse contexto, e tendo-se em vista a bimodularidade, propõe uma lei de evolução não associativa para as deformações residuais, inspirada na proposta de [11], dada por:

$$\varepsilon^p = \frac{\partial g_T}{\partial \sigma} D_T + \frac{\partial g_C}{\partial \sigma} D_C \quad (8)$$

Sendo g_T e g_C potenciais anelásticos.

Admitindo-se, ainda por simplificação, que as deformações plásticas são compostas exclusivamente por deformações volumétricas, nos moldes de alguns modelos encontrados na literatura [12], os potenciais podem ser expressos por:

$$g_T = \beta_T (D_T) I_1 \quad (9)$$

$$g_c = \beta_c (D_c) I_1 \quad (10)$$

Onde as funções de dano $\beta_T (D_T)$ e $\beta_c (D_c)$, são dependentes do material. No caso do modelo proposto para aplicação ao concreto, assumem-se as seguintes funções:

$$\beta_T (D_T) = \frac{\beta_1}{(1 - D_1)^2} \quad (11)$$

$$\beta_c (D_c) = \frac{\beta_2}{(1 - D_2)^2} \quad (12)$$

Sendo I_1 o primeiro invariante do tensor de tensões. Segue, daí, que a Eq. 8 assume a forma descrita a seguir:

$$\varepsilon^p = \beta_T (D_T) I_1 D_T + \beta_c (D_c) I_1 D_c \quad (13)$$

Finalmente, a lei de evolução para as deformações plásticas ε^p , levando-se em conta o efeito unilateral, resulta:

$$\varepsilon^p = \left(\frac{\beta_1}{(1 - D_1)^2} D_1 + \frac{\beta_2}{(1 - D_2)^2} D_2 \right) I_1 \quad (14)$$

Observa-se que nesta proposta β_1 e β_2 são parâmetros diretamente relacionados às evoluções das deformações plásticas induzidas pelo dano em tração e em compressão, respectivamente. Quando os valores desses parâmetros são impostos como nulos, recupera-se o modelo originalmente proposto em [3], ou seja, comportamento elástico-danificado sem a consideração de deformações plásticas.

É importante observar que a identificação dos parâmetros β_1 e β_2 necessita da realização de ensaios uniaxiais de tensão em tração e compressão, respectivamente, com carregamento e descarregamento.

Por outro lado, admitindo para o problema analisado neste trabalho que a direção longitudinal representa a direção perpendicular ao plano de isotropia transversal, a versão unidimensional do modelo de dano é descrita brevemente pelas equações seguintes:

$$E(\varepsilon) = \begin{cases} E_c \text{ se } g(\varepsilon, D_T, D_c) < 0 \\ E_T \text{ se } g(\varepsilon, D_T, D_c) > 0 \end{cases} \quad (15)$$

$$E_T = E(1 - D_1)^2 (1 - D_2)^2 \quad (16)$$

$$E_c = E(1 - D_2)^2 \quad (17)$$

Já a energia associada W_{e+}^* e W_{e-}^* ao desenvolvimento do modelo se reduz ao formato simplificado:

$$W_{e+}^* = \frac{\sigma_{11}^2}{2E(1 - D_1)^2 (1 - D_2)^2} \quad (18)$$

$$W_{e-}^* = \frac{\sigma_{11}^2}{2E(1 - D_2)^2} \quad (19)$$

$$Y_T = \frac{\partial W_{e+}^*}{\partial D_1} = Y_1 \quad (20)$$

$$Y_c = \frac{\partial W_{e-}^*}{\partial D_2} = Y_2 \quad (21)$$

$$Y_1 = \frac{\sigma_{11}^2}{2E(1 - D_1)^3 (1 - D_2)^2}; Y_2 = \frac{\sigma_{11}^2}{E(1 - D_2)^3} \quad (22)$$

Maiores detalhes sobre o modelo de dano podem ser encontrados em Pituba e Fernandes [3]. A Figura 1 apresenta o modelo de elementos finitos utilizado neste trabalho.

2.3 Modelo de homogeneização para consideração da presença das fibras no concreto

O comportamento mecânico de estruturas de concreto reforçado

Figura 2 – Modelo do comportamento à tração para o concreto com fibras proposto por La Borderie (4)

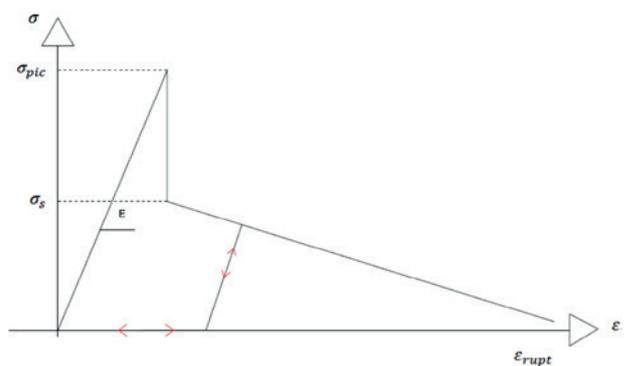


Tabela 1 – Características da fibra de aço utilizadas por Velasco (13)

Propriedade analisada	Valor
Massa Específica (kg/m³)	7800
Comprimento (mm)	35
Diâmetro (mm)	0,54
Relação de aspecto (l/d)	65
Módulo de elasticidade (GPa)	202
Resistência a tração (MPa)	1342

com fibras, quando submetidas a situações de carregamento e descarregamento, depende das interações do conjunto fibra/matriz. Neste trabalho, o procedimento de homogeneização proposto por La Borderie [4] é utilizado. Na Figura 2 é apresentada a relação constitutiva do comportamento à tração da fibra imersa no concreto proposta por La Borderie, a qual é obtida do ensaio de arrancamento de fibras. Nessa figura observam-se os parâmetros tensão de pico (σ_{pic}), tensão inicial de patamar do escoamento (σ_s) e deformação limite (ϵ_{rupt}).

Por outro lado, via método de homogeneização cinemática de Voigt, La Borderie [4] propõe a seguinte expressão para o cálculo da tensão homogeneizada do compósito:

$$\sigma_{CRFA} = (1 - C)\sigma_m + C\sigma_f \quad (23)$$

Onde:

σ_{CRFA} : Tensão do material homogeneizado, dito CRFA;

C : Fração volumétrica de fibras de aço;

σ_m : Tensão na matriz cimentícia;

σ_f : Tensão na interface fibra tracionada imersa no concreto;

Observa-se que foi introduzida uma hipótese simplificadora, onde a deformação é suposta idêntica para a matriz e a fibra. Além disso, a orientação das fibras, que é aleatória e não privilegiada no sentido da solicitação, não é levada em conta na modelagem proposta.

3. Simulações numéricas

3.1 Simulação dos experimentos de Velasco [13]

O primeiro exemplo trata da simulação numérica de prismas de concreto reforçado com fibras de aço ensaiados à flexão por Velasco [13]. As fibras utilizadas no concreto foram do tipo A-I segundo classificação da NBR 15530:2007 [14] com gancho nas extremidades. As características da fibra de aço são apresentadas na Tabela 1.

Os traços dos concretos utilizados para a produção dos prismas por Velasco [13] foram previamente estudados por Lopes [15]. Para a modelagem numérica foi escolhido o concreto de referência MCWSF (nomenclatura empregada por Velasco [13]) e suas variações com 1,0% (MCWSFA10), 1,5% (MCWSFA15) e 2,0% (MCWSFA20) de fibras de aço com as características informadas na Tabela 2.

3.1.1 Parâmetros do modelo de dano

Para a representação do comportamento do concreto reforçado com fibras de aço (CRFA), primeiramente deve-se obter as

Tabela 2 – Propriedades mecânicas dos concretos estudados por Lopes (15)

Concreto	Nomenclatura	f_{cm} (MPa)	Módulo de elasticidade (GPa)	Coefficiente de Poisson (ν)	Percentual de fibras (%)
1	MCWSF	55,1	35,7	0,17	0,00
2	MCWSFA10	61,7	34,8	0,19	1,00
3	MCWSFA15	70,0	37,4	0,19	1,50
4	MCWSFA20	72,4	37,7	0,21	2,00

Tabela 3 - Parâmetros de dano identificados para o concreto sem fibras e submetido à compressão e tração uniaxial

Variáveis de dano para compressão		Variáveis de dano para tração	
A_2	0,7	A_1	15
B_2 (Mpa ⁻¹)	2,5	B_1 (Mpa ⁻¹)	1200
YO_2 (Mpa)	0,004945	YO_1 (Mpa)	0,000086
β_2	0,000300	β_1	0,000025

Tabela 4 – Parâmetros de dano e módulo de elasticidade identificados para o concreto com 0,0% de fibras a partir do ensaio de flexão a quatro pontos em corpos de prova prismáticos de 100 mm x 100 mm x 400 mm

Parâmetros	Tração	Compressão	$F_{pico, num} / F_{pico, exp}$
E Mpa	41000	41000	0,0860%
A	15	0,7	0,0860%
B (Mpa ⁻¹)	1030	2,5	0,0860%
YO (Mpa)	0,00085	0,04945	0,0860%
B	0,00000045	0,0003	0,0860%

Tabela 5 – Parâmetros do modelo de homogeneização de La Borderie (4) para concretos com 1,0%, 1,5% e 2,0% de fibras de aço – Exemplo I

Volume de fibras	$F_{pico, num}$ (kN)	Tensão de pico - σ_{pic} (MPa)	Tensão de escoamento - σ_s (MPa)	Deformação de ruptura - ϵ_{rupt} (m/m)	$F_{pico, num} / F_{pico, exp}$
1,00%	38,20	530,00	477,00	0,0200	0,0460%
1,50%	58,00	570,00	513,00	0,0220	0,9600%
2,00%	62,80	460,00	414,00	0,0220	1,0800%

variáveis do modelo de dano para o concreto de referência, que neste caso é a mistura 1 (MCWSF), sem fibras, da Tabela 2. Para tanto, os parâmetros do modelo de dano foram determinados a

partir das curvas obtidas dos ensaios de tração e compressão uniaxiais de Velasco [13]. A curva tensão *versus* deformação à tração experimental foi obtida de corpos de prova prismáticos de 100

Figura 3 – Comparação entre as curvas carga versus deslocamento no meio do vão numérica e experimental de Velasco (13) para situação de flexão a quatro pontos para o concreto com 0,0% de fibras

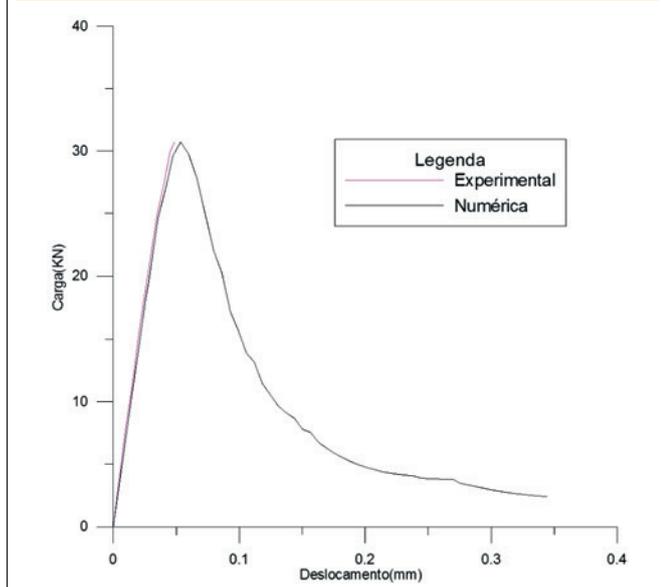
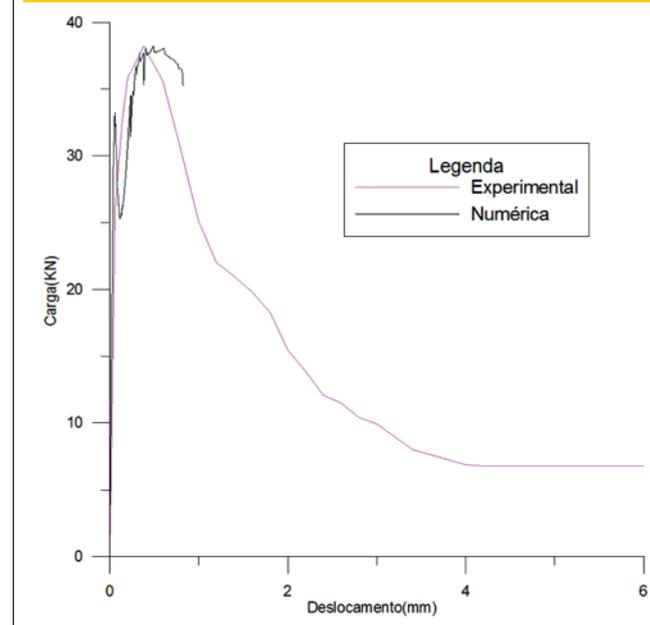


Figura 4 – Comparação da curva carga versus deslocamento no meio do vão numérica e experimental para situação de flexão a quatro pontos para o concreto com 1,0% de fibras



mm x 100 mm x 400 mm moldados na direção horizontal e a curva de compressão foi obtida de corpos de provas cilíndricos padronizados pela NBR 6118:2003 [19]. Por meio de retroanálise, foram determinadas as variáveis de dano do modelo empregado neste estudo, para o concreto sem fibras, apresentadas na Tabela 3.

Na sequência, os parâmetros obtidos para o modelo de dano à tração e compressão foram utilizados para simular prismas, com dimensão de 100 mm x 100 mm x 400 mm e vão livre de 300 mm, submetidos à flexão. Para isso, foi definido um modelo computacional com uma malha de elementos finitos com 10 camadas e 19 elementos longitudinais. A partir desse modelo, foi obtida a curva força *versus* deslocamento no meio do vão do prisma, a qual foi comparada com a respectiva curva experimental. Essa comparação mostrou que não houve uma boa aderência dos resultados numéricos com os resultados experimentais e, por essa razão, foram determinados novos parâmetros para o modelo de dano à tração, os quais são mostrados na Tabela 4. Tal comportamento pode ser explicado pelo fato da sensibilidade dos parâmetros à tração no efeito da flexão, visto que os mesmos apresentaram problemas de convergência nas cargas últimas devido ao alto nível de danificação nas camadas tracionadas de concreto, evidenciando uma localização do processo de danificação que o modelo em questão não é propício para capturar. Na Figura 3 é mostrado o resultado final obtido com os valores ajustados das variáveis de dano para o concreto sem fibras.

Na sequência, foram determinados os parâmetros do modelo de homogeneização de La Borderie [4] para o concreto reforçado com fibras. Essa identificação foi realizada por meio da retroanálise dos corpos de prova prismáticos ensaiados à flexão por quatro

pontos de força e com as mesmas dimensões dos prismas de concreto sem fibras citados em Velasco [13]. As curvas experimentais e numéricas obtidas são apresentadas nas Figuras 4 a 6, de onde se observa boa aproximação entre as curvas. Já os valores finais obtidos para os parâmetros do modelo de homogeneização de La Borderie [4] são apresentados na Tabela 5, na qual se observa que a diferença entre a força de pico numérica e experimental foi menor que 1%. Todas as análises relativas aos processos de danificação das Figuras 4 a 6 são apresentadas na seção 3.1.2.

3.1.2 Análise do processo de danificação

Para analisar a distribuição da danificação nos prismas de CRFA, os valores de dano em tração num carregamento próximo ao pico foram representados graficamente (Figura 7a). Pode-se observar que existe uma danificação acentuada na face inferior e no meio do prisma, diminuindo o processo de danificação conforme se aproxima do apoio.

Para o concreto com de 1,50% de fibras, o modelo numérico apresentou resposta apenas até 1,05 mm de deslocamento no meio do vão, próximo à carga de pico. A danificação no prisma neste caso é ilustrada na Figura 7b. Para o concreto com 2,00% de fibras, a danificação no prisma próxima à carga de pico é apresentada na Figura 7c.

Analisando a Figura 7 é possível perceber uma ampliação da área danificada na carga de pico e isso se deve ao fato de que o sistema consegue absorver uma quantidade maior de esforço, intensificando assim a sua danificação. Na Figura 8 e Tabela 6 são realizados estudos para verificação do efeito da fibra no sistema.

Figura 5 - Comparação da curva carga versus deslocamento numérica e experimental no meio do vão para situação de flexão a quatro pontos para o concreto com 1,5% de fibras

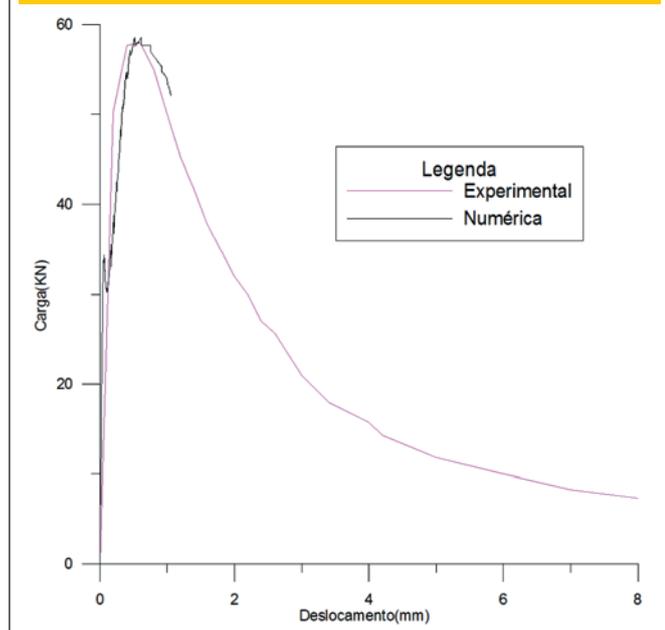


Figura 6 - Comparação da curva carga versus deslocamento no meio do vão numérica e experimental para situação de flexão a quatro pontos para o concreto com 2,0% de fibras

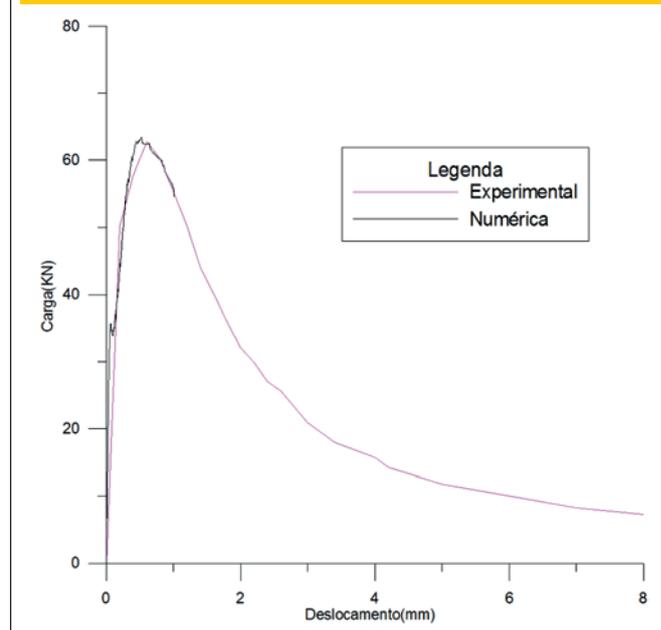


Figura 7 - Representação gráfica do dano à tração (D_t) nos prismas de concreto



A 1,0% de fibras de aço



B 1,5% de fibras de aço



C 2,0% de fibras de aço

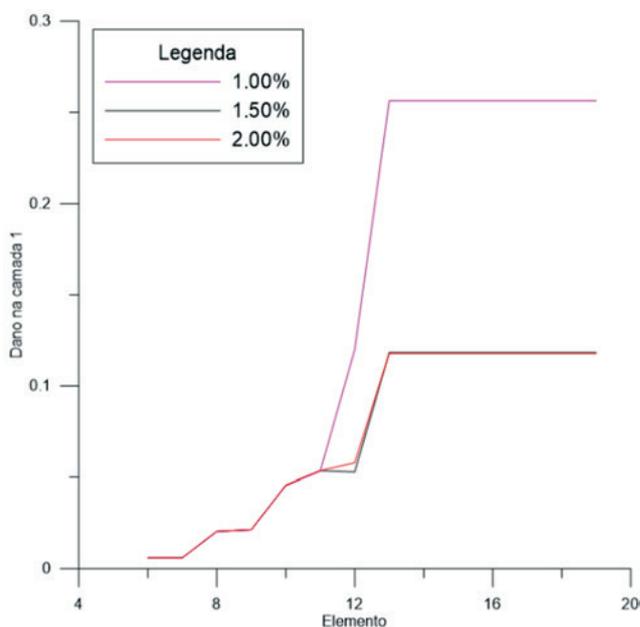
O carregamento utilizado para a análise é de 30 kN.

Da Figura 8 e Tabela 6 é possível perceber que em um mesmo nível de carregamento ($P=30$ kN) a peça com maior concentração de fibra apresentou uma menor danificação, o que evidencia o efeito de grampeamento das fissuras, diminuindo o efeito de tração na peça de concreto.

Tabela 6 - Análise da danificação à tração em função da porcentagem de fibras

Porcentagem de fibras	Elemento danificado	Dano no elemento
1,00%	19	0,2563
1,50%	19	0,1184
2,00%	19	0,1179
1.00E-02	1.00E-02	0

Figura 8 - Evolução do dano na 1ª camada tracionada em função da porcentagem de fibras para carga de 30 kN



3.2 Simulação dos experimentos de Lopes [15]

O exemplo II analisa uma das vigas de CRFA ensaiada por Lopes [15]. As fibras de aço utilizadas no concreto neste caso foram do tipo A-I, sendo que suas características são apresentadas na Tabela 7. Já a Tabela 8 apresenta as propriedades mecânicas do concreto utilizado na confecção da viga analisada neste exemplo.

3.2.1 Parâmetros do modelo de dano

Os parâmetros do modelo de dano à tração para o concreto sem fibras foram obtidos por meio de retroanálise de prismas de 100 mm x 100 mm x 400 mm (vide Figura 9), com vão livre de 300 mm, ensaiados à flexão sob quatro pontos de força. Já os parâmetros de compressão foram adotados os mesmos do exemplo citado em 3.1. Os valores finais obtidos são mostrados na Tabela 9. A comparação entre as curvas experimental e numérica é mostrada na referência [16], tendo sido adotada uma tolerância de 5% para a relação entre a força de pico experimental e numérica. Neste

Tabela 7 - Propriedades das fibras de aço utilizadas por Lopes (15)

Propriedade analisada	Valor
Módulo de elasticidade (GPa)	200
Resistência a tração (MPa)	1150
Massa específica (kg/m³)	7850
Comprimento (mm)	35
Diâmetro (mm)	0,55
Relação de aspecto (l/d)	64

Tabela 8 – Propriedades mecânicas do concreto obtidas por Lopes (15) e utilizadas na modelagem numérica

Concreto	Nomenclatura	f_{cm} (MPa)	Módulo de elasticidade (GPa)	Coefficiente de Poisson (ν)	Percentual de fibras (%)
1	FOV5SPrx1	59,06	34,91	0,20	0,00
2	FAb2V5SPg1	64,22	30,19	0,22	2,00

Figura 9 – Flexão em quatro pontos utilizada para identificação das variáveis de fibras

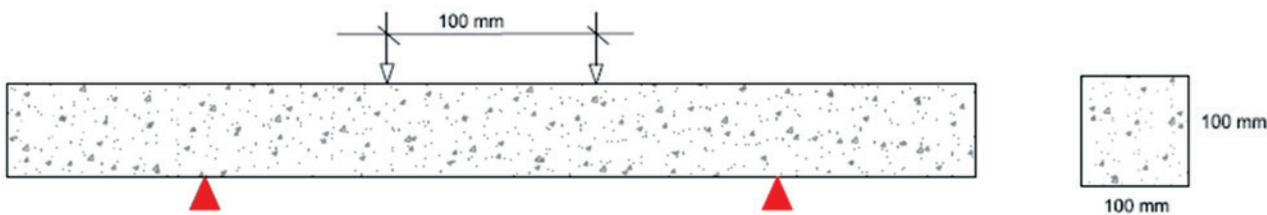


Tabela 9 – Parâmetros de dano e módulo de elasticidade do concreto sem fibras identificados a partir do ensaio de flexão a quatro pontos em corpos de prova prismáticos de 100 mm x 100 mm x 400 mm

Parâmetros	Tração	Compressão	$F_{pico, num}$ (kN)	$F_{pico, num} / F_{pico, exp}$
E (MPa)	34910	34910	25,746	2,52%
A	15	0,7	25,746	2,52%
B (Mpa ⁻¹)	1290	2,5	25,746	2,52%
YO (Mpa)	0,000086	0,004945	25,746	2,52%
β	0,00000045	0,0003	25,746	2,52%

Tabela 10 – Parâmetros do modelo de homogeneização de La Borderier (4) para concreto com 2,0% de fibras - Exemplo II

Volume de fibras	$F_{pico, num}$ (kN)	Tensão de pico - σ_{pic} (MPa)	Tensão de escoamento - σ_s (MPa)	Deformação de ruptura - ϵ_{rupt} (m/m)	$F_{pico, num} / F_{pico, exp}$
2,00%	64,49	525,00	420,00	0,0250	0,2444%

caso, foi utilizado o valor do módulo de elasticidade do concreto determinado nos ensaios.

Na sequência, foram determinados os parâmetros do modelo de homogeneização de La Borderie [4] para o concreto reforçado com 2% fibras de aço utilizando os prismas de Lopes [15], mantendo-se constante os parâmetros do modelo de dano determinados para o concreto sem fibras. A Tabela 10 apresenta os valores obtidos para o modelo de homogeneização de La Borderie [4].

3.2.2 Modelagem da viga submetida à flexão

A geometria da viga analisada neste exemplo, assim como o detalhamento de sua armadura, está ilustrada na Figura 10. Essa viga foi confeccionada com um concreto com 2% de fibras de aço e foi solicitada à flexão por meio de duas forças concentradas distantes 10 cm entre si.

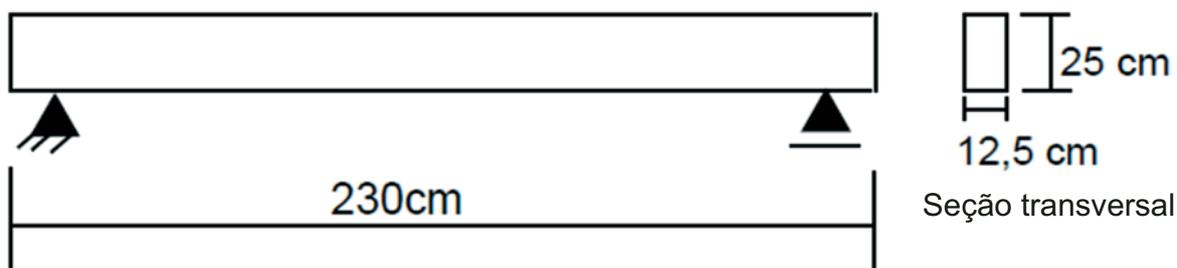
Devido à simetria, apenas a metade da viga foi modelada

utilizando 50 elementos finitos longitudinais e a seção transversal foi estratificada em 24 camadas. A distribuição das camadas encontra-se ilustrada na Figura 11. As propriedades da armadura

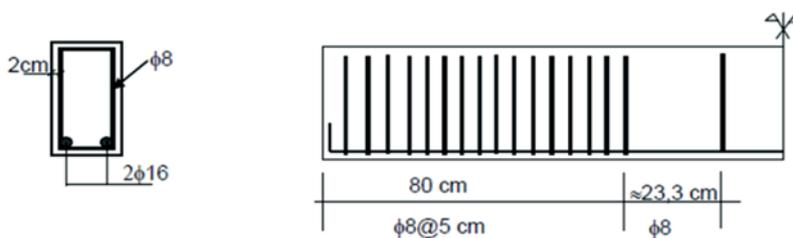
Tabela 11 – Dados do aço utilizado na modelagem das vigas ensaiadas por Lopes (15)

Parâmetro	Valor
Módulo de elasticidade (MPa)	210000
Tensão de escoamento (MPa)	500
Tensão última (MPa)	550
Massa específica (kg/m ³)	7850
Deformação de ruptura (%)	1.000

Figura 10 - Viga ensaiada numericamente com embasamento na geometria de Lopes (15)



A Geometria da viga ensaiada por Lopes (15)



B Armadura da viga ensaiada por Lopes (15)

longitudinal utilizadas na modelagem são mostradas na Tabela 11. Já os parâmetros do modelo de dano e os parâmetros do modelo de homogeneização são os já apresentados nas Tabelas 9 e 10, visto que essa viga foi confeccionada com o mesmo concreto utilizado na confecção dos prismas previamente analisados. A comparação entre os resultados numérico e experimental dessa viga é apresentada na Figura 12, de onde se observa uma boa aproximação nos carregamentos iniciais e uma divergência entre as curvas para carregamentos próximos à ruína. Tal comportamento é devido à formação de fraturas nesse estágio de carregamento, visto que o modelo aqui empregado não apresenta res-

posta satisfatória para localização de dano/fratura. Sendo assim, a análise dessa viga ficou restrita a carregamentos em regime de serviço, aqui definido como carregamentos inferiores a 40% da força última.

A razão para a escolha desse valor se deve ao fato que as estruturas são dimensionadas no Estado Limite Último, segundo a

Figura 11 - Representação esquemática da estratificação da seção transversal da viga ensaiada por Lopes (15)

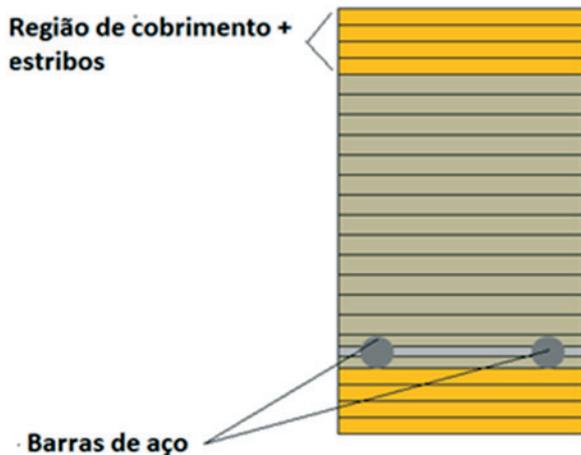
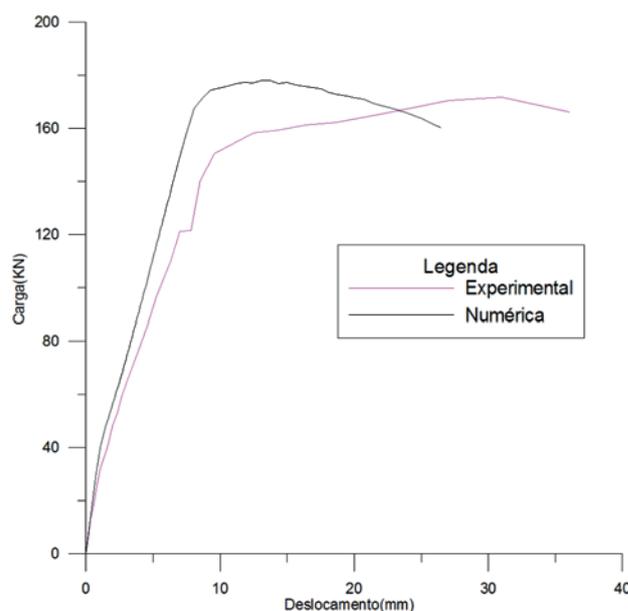


Figura 12 - Gráfico força versus deslocamento no meio do vão para a viga ensaiada por Lopes (15)

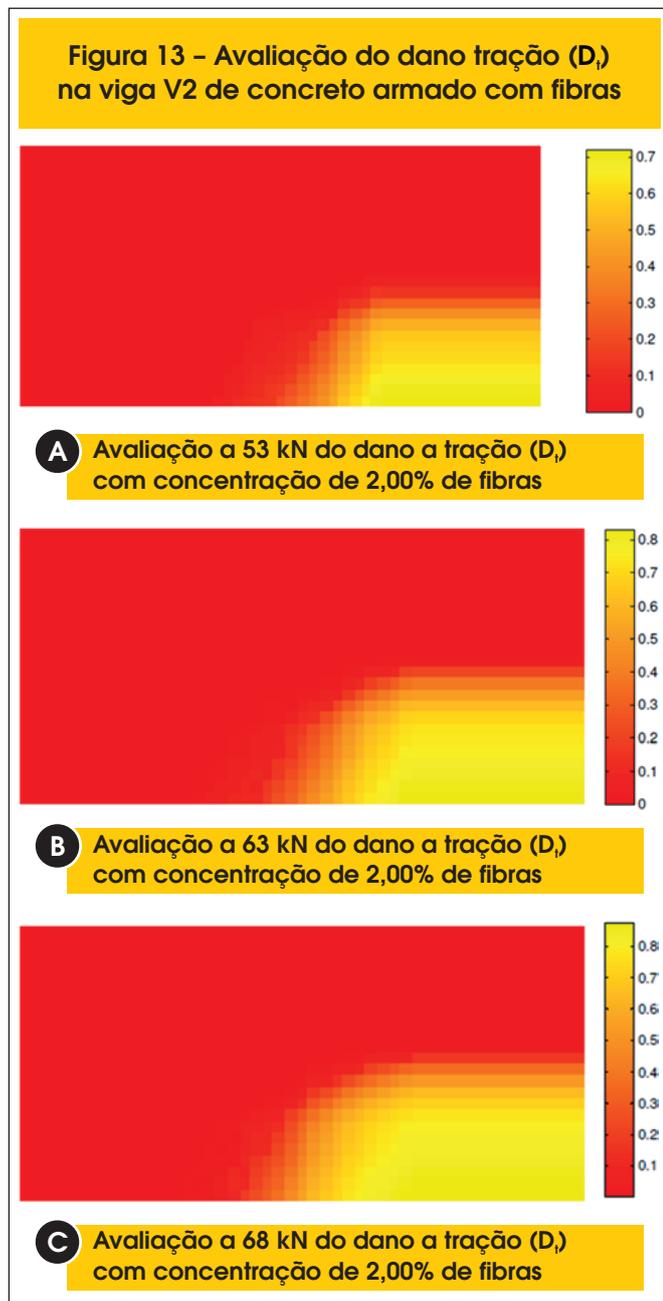


NBR 8681 e NBR 6118. Para isso, as ações são majoradas e a resistência dos materiais é minorada. De forma geral, as estruturas são dimensionadas para a combinação normal de ações. Neste caso, o coeficiente de majoração das ações vale 1,4. Já o coeficiente de minoração do concreto vale 1,4 e o do aço vale 1,15. Se a força de ruína das vigas for dividida pelo produto desses coeficientes, no sentido de se obter o carregamento em serviço da estrutura, chega-se a uma força igual a 44% do valor da força de ruína. Esta situação corresponde, aproximadamente, à combinação rara para os Estados Limites de Serviço estabelecidos pela NBR 6118 e NBR 8681, no qual se adotou $\gamma_m = \gamma_f = 1,0$. Adotou-se 40% do valor da força de ruína da viga como sendo aquela a que a viga estaria submetida em situação de serviço, uma vez que para a combinação quase permanente de ações a sobrecarga é reduzida, ainda, de 40% a 70% do seu valor característico. Isto corresponde, segundo o ensaio, a uma força de aproximadamente 68 kN e um deslocamento no meio do vão igual a 3,297 mm. O valor do deslocamento obtido da modelagem numérica para esse carregamento foi de 2,695 mm, o que representa um erro de 18%

na avaliação da flecha da viga. Por outro lado, avaliando a flecha dessa viga pelo modelo de cálculo sugerido pela NBR 6118 para vigas de concreto, chega-se a um deslocamento de 3,69 mm. Esse valor é 12% maior que o registrado no ensaio para o carregamento de 68 kN.

A danificação de tração na viga para carregamentos próximos à carga de serviço é apresentada na Figura 13. Percebe-se que à medida que o carregamento aumenta a danificação aumenta e se dissipa cada vez mais ao longo da viga. Observa-se, também, que a danificação em regime de serviço já apresenta valores elevados, sendo que nas regiões mais tracionadas ela se aproxima de 0,9. Isto é verificado mais claramente na Figura 19 que apresenta a evolução do dano na 1ª camada tracionada da viga.

A Figura 15 mostra o panorama da danificação à tração na viga para o carregamento total de 85,8 kN, o que ilustra que há uma concentração de fissuras na região de flexão pura. Esse comportamento é coerente com o panorama de fissuração observado no ensaio. Por outro lado, como o modelo não considera a tensão de cisalhamento, as fissuras da região de flexão simples não são bem representadas pelo modelo numérico.



3.3 Simulação dos experimentos de Oliveira [17]

O exemplo III é baseado no trabalho de Oliveira [17]. Neste trabalho, foi utilizada a fibra de aço tipo A-I, cujas características são apresentadas na Tabela 12. Na Tabela 13 são apresentadas as propriedades mecânicas do concreto.

3.3.1 Parâmetros do modelo de dano

Corpos de prova prismáticos de diferentes dimensões foram ensaiados para avaliação do comportamento carga versus deslocamento no trabalho de Oliveira [17]. Os corpos de prova selecionados para análise neste trabalho foram os de 150 mm x 150 mm x 500 mm (com vão livre de 400 mm), 100 mm x 100 mm x 400 mm

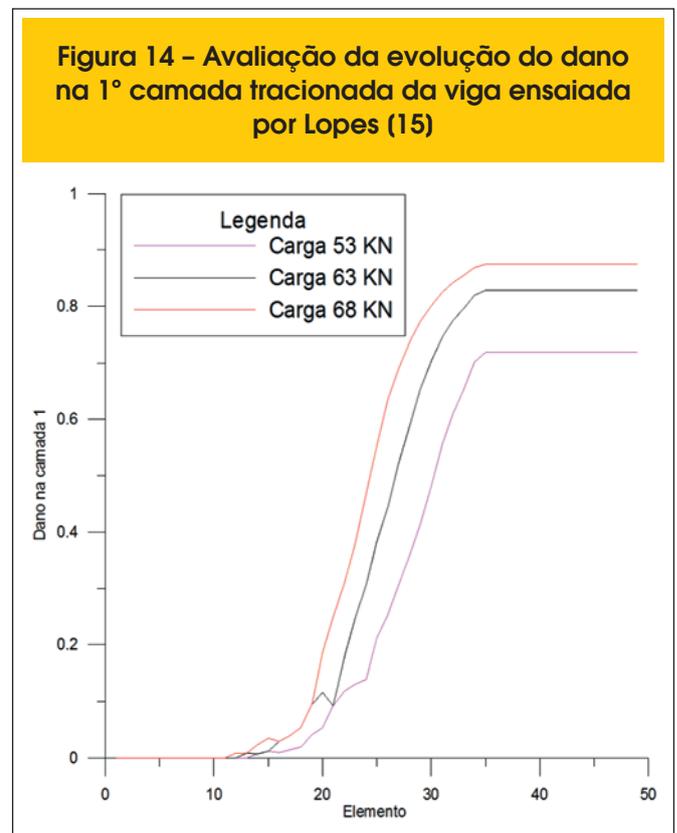
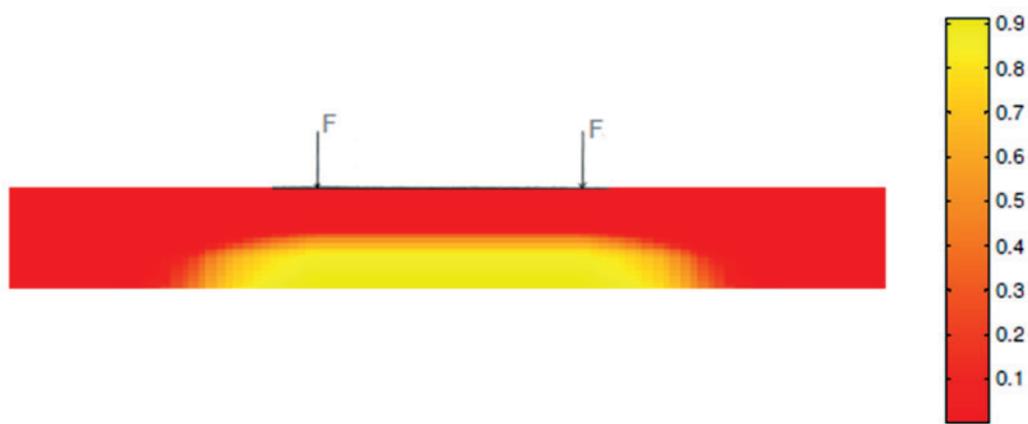
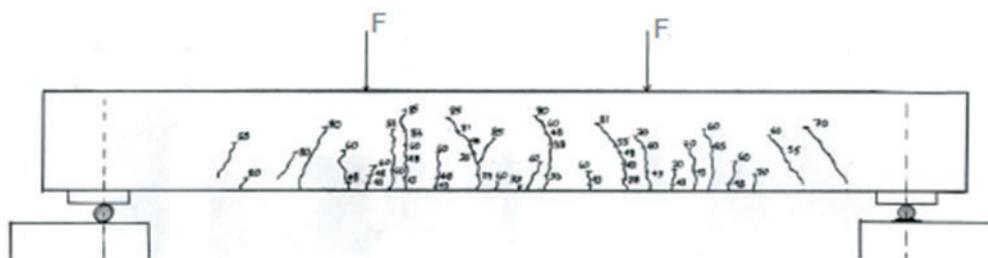


Figura 15 – Comparação do padrão de fissuração no carregamento de 85,80 kN para valores numéricos e experimentais



A Avaliação numérica do dano à tração (D_t) no carregamento proposto de 85,80 kN



B Mapeamento de fissuras detectadas por Lopes (15) no carregamento de 85,80 kN

(com vão livre de 300 mm) e 200 mm x 200 mm x 800 mm (com vão livre de 600 mm).

Tabela 12 – Características da fibra de aço do trabalho de Oliveira (17)

Propriedade analisada	Valor
Módulo de elasticidade (GPa)	200
Resistência a tração (MPa)	1100
Massa específica (kg/m ³)	7850
Comprimento (mm)	60
Diâmetro (mm)	0.75
Relação de aspecto (l/d)	80

Para obtenção dos parâmetros do modelo de dano utilizou-se o corpo de prova prismático de 150 mm x 150 mm x 500 mm com 1,25% de fibras de aço da Viga V9 do trabalho de Oliveira [17]. Os resultados obtidos são apresentados na Tabela 14 e 15. Esses parâmetros foram mantidos constantes em todas as análises subsequentes, variando-se apenas os valores dos parâmetros do modelo de homogeneização. Na Figura 16 é mostrada a comparação da curva obtida da análise numérica com a curva experimental. O percentual de erro entre a carga de pico numérica e carga de pico experimental para este prisma foi de 1,24%. Lembrando que o modelo aqui empregado não consegue representar numericamente grandes deslocamentos, devido ao surgimento de fraturas localizadas.

Para a viga V8, com percentual de fibras de 0,75%, também foi utilizado o corpo de prova de 150 mm x 150 mm x 500 mm ensaiado por Oliveira [17]. Os valores dos parâmetros do modelo de homogeneização obtidos são apresentados na

Tabela 13 – Propriedades mecânicas do concreto das vigas ensaiadas por Oliveira (17)

Viga	f_{cm} (MPa)	Módulo de elasticidade E_{cm} (GPa)	Coefficiente de Poisson (ν)	Percentual de fibras (%)
V7	55,27	51,10	0,21	0,50
V8	53,27	45,20	0,18	0,75
V9	62,33	40,67	0,18	1,25

Tabela 14 – Parâmetros de dano e módulo de elasticidade do concreto sem fibras identificados a partir do ensaio de flexão a quatro pontos em corpos de prova prismáticos de 150 mm x 150 mm x 500 mm

Parâmetros	Tração	Compressão	$F_{pico, num}$ (kN)	$F_{pico, num} / F_{pico, exp}$
E (MPa)	33700	33700	78,74	1,24%
A	12	0,7	78,74	1,24%
B (MPa ⁻¹)	6500	2,5	78,74	1,24%
YO (Mpa)	0,000003	0,004945	78,74	1,24%
β	0,00000295	0,0003	78,74	1,24%

Tabela 15 – Parâmetros do modelo de homogeneização de La Borderier (4) para concreto com 1,25% de fibras - Exemplo III

Volume de fibras	$F_{pico, num}$ (kN)	Tensão de pico - σ_{pic} (MPa)	Tensão de escoamento - σ_s (MPa)	Deformação de ruptura - ϵ_{rupt} (m/m)	$F_{pico, num} / F_{pico, exp}$
1,25%	78,74	430,00	344,00	0,0400	1,24

Tabela 16 – Parâmetros do modelo de homogeneização de La Borderier para a viga V8 com 0,75% de fibras de aço ensaiada por Oliveira (17)

Volume de fibras	$F_{pico, num}$ (kN)	Tensão de pico - σ_{pic} (MPa)	Tensão de escoamento - σ_s (MPa)	Deformação de ruptura - ϵ_{rupt} (m/m)	$F_{pico, num} / F_{pico, exp}$
0,75%	54,31	480,00	384,00	0,040	0,254%

Tabela 17 – Parâmetros de La Borderie (4) da curva calibrada para o concreto da viga V7 com 0,50% de fibras

Volume de fibras	$F_{pico, num}$ (kN)	Tipo de prisma	Tensão de pico - σ_{pic} (MPa)	Tensão de escoamento - σ_s (MPa)	Deformação de ruptura - ϵ_{rupt} (m/m)	$F_{pico, num} / F_{pico, exp}$
0,50%	22,89	100 x 100 x 450 mm	675,00	540,00	0,040	0,180%
0,50%	46,84	150 x 150 x 500 mm	615,00	492,00	0,040	1,134%
0,50%	61,17	200 x 200 x 800 mm	430,00	344,00	0,040	0,015%

Tabela 18 – Dados da armadura longitudinal utilizada na modelagem das vigas ensaiadas por Oliveira (17)

Viga	Módulo de elasticidade do aço (MPa)	Tensão de escoamento - σ_{pic} (MPa)	Tensão de pico - σ_s (MPa)	Deformação de ruptura - ϵ_{rupt} (m/m)
V7	210000	628	729	1,115
V8	210000	628	729	1,115
V9	210000	651	790	1,013

Tabela 16 e as curvas numérica e experimental são apresentadas na Figura 23.

Para a viga V7, com 0,50% de fibras de aço, foram analisadas as três dimensões de corpos de prova ensaiados por Oliveira [17]. Os valores dos parâmetros do modelo de homogeneização são apresentados na Tabela 17. Observa-se dessa Tabela que os parâmetros obtidos para o modelo de La Borderie são

dependentes das dimensões dos corpos de prova. Na Figura 18 são apresentadas as respostas numérica e experimental para as três dimensões de corpos de prova com volume de fibras de 0,50%. Um fator importante a ser dito neste momento é o fato da limitação geométrica do modelo de dano, pois a medida que se muda a seção transversal é possível verificar a influência da seção na resposta numérica.

Figura 16 – Curva numérica versus experimental do corpo de prova da viga V9 de Oliveira (17) com 1,25% de fibras

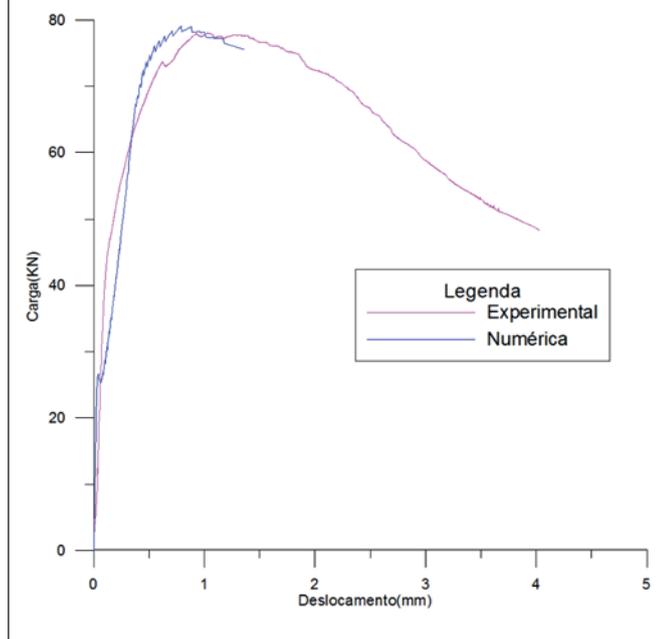
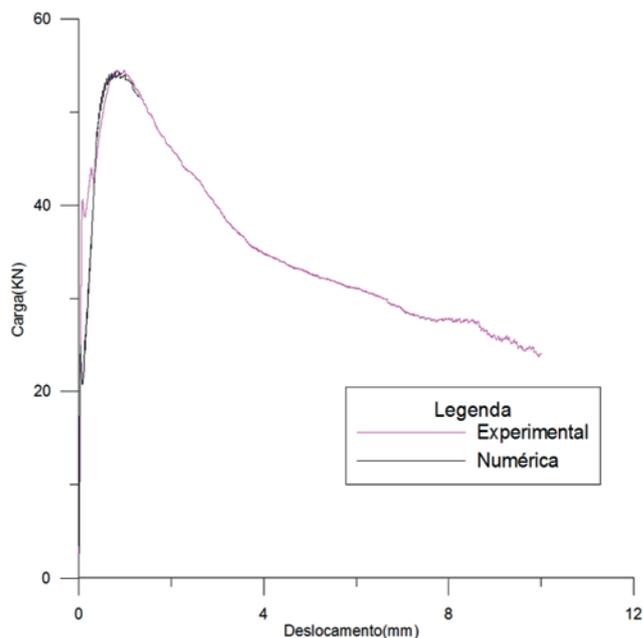


Figura 17 – Curva numérica versus experimental do corpo de prova da viga V8 de Oliveira (17) com 0,75% de fibras



3.3.2 Modelagem das vigas submetidas à flexão

Além dos prismas, Oliveira [17] realizou o ensaio de nove vigas com o objetivo de determinar a influência das fibras de aço na armadura mínima de vigas de concreto armado. Na Figura 19 são apresentadas as características geométricas das vigas ensaiadas por Oliveira [17]. Para a modelagem numérica dessa viga, utilizou-se uma divisão de 50 elementos na direção longitudinal e seção transversal com 24 estratificações, conforme mostrado na Figura 11 do Exemplo II. Na Tabela 18 são apresentadas as propriedades da armadura longitudinal utilizada na modelagem das vigas.

A Figura 20 apresenta as curvas força versus deslocamento no meio do vão numérica e experimental para a viga V7, com 0,5% de fibras. As curvas numéricas foram obtidas a partir dos parâmetros do modelo de homogeneização determinados dos três tamanhos diferentes de corpo de prova. As legendas P450, P600 e P300 referem-se ao vão livre do prisma, sendo P450 o prisma de 150 mm x 150 mm x 500 mm, P600 o prisma de 200 mm x 200 mm x 800 mm e P300 o prisma de 100 mm x 100 mm x 400 mm. Da mesma maneira que no Exemplo II, as análises realizadas são todas no regime de serviço.

É possível observar dessa figura que o efeito escala é perceptível em regiões de carregamento mais elevado. Como a análise deste trabalho

se restringe a regimes de serviço e os resultados neste caso foram coincidentes, todas as análises seguintes foram realizadas com os parâmetros determinados a partir do prisma de 600 mm de vão livre. A força de ruína experimental da viga foi de 111,88 kN e a força de serviço estimada para análise da mesma foi de 44,75 kN. Neste caso, o deslocamento no meio do vão da viga para este carregamento foi de 0,503 mm. Já da análise numérica, o deslocamento correspondente a esse carregamento foi de 0,514 mm, apresentando um erro de apenas 2%.

A Figura 21 apresenta o perfil de dano em tração próximo ao regime de carregamento de 50 kN. É possível perceber que mesmo em regiões de baixos carregamentos a viga já apresenta uma danificação acentuada no meio do vão, o que se deve à baixa taxa de armadura longitudinal utilizada no ensaio da viga. Assim, a partir desse carregamento há a formação de microfissuras no ensaio da viga. O modelo numérico tenta reproduzir esse fenômeno com a queda de resistência para uma força próxima de 55 kN, porém em seguida há uma recuperação da resistência da viga e o comportamento a partir daí passa a ser influenciado pelas propriedades obtidas para o modelo de homogeneização. A Figura 22 evidencia esse fenômeno ao ilustrar o aumento brusco da danificação na primeira camada da viga, no meio do vão, com o incremento do carregamento de 50 kN para 60 kN.

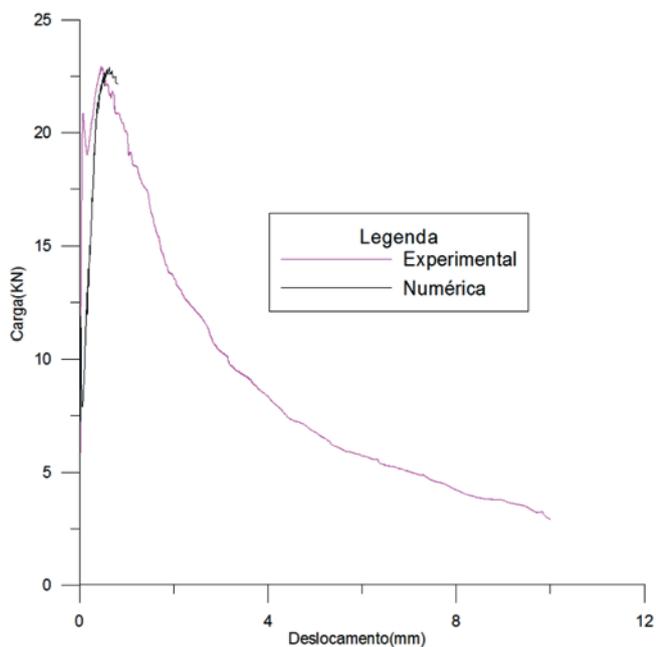
Tabela 19 – Parâmetros do modelo de homogeneização de La Borderier (4) obtidos da retroanálise das vigas ensaiadas por Oliveira (17)

Viga	Volume de fibras (%)	F_{pico} (kN)	Tensão de pico - σ_{pic} (MPa)	Tensão de escoamento - σ_s (MPa)	Deformação de ruptura - ϵ_{rupt} (m/m)	$\frac{F_{pico, num}}{F_{pico, exp}}$
V7	0,50	110,21	220,00	187,00	0,020	1,49%
V8	0,75	130,88	240,00	204,00	0,020	5,69%
V9	1,25	170,66	245,00	208,50	0,020	2,09%

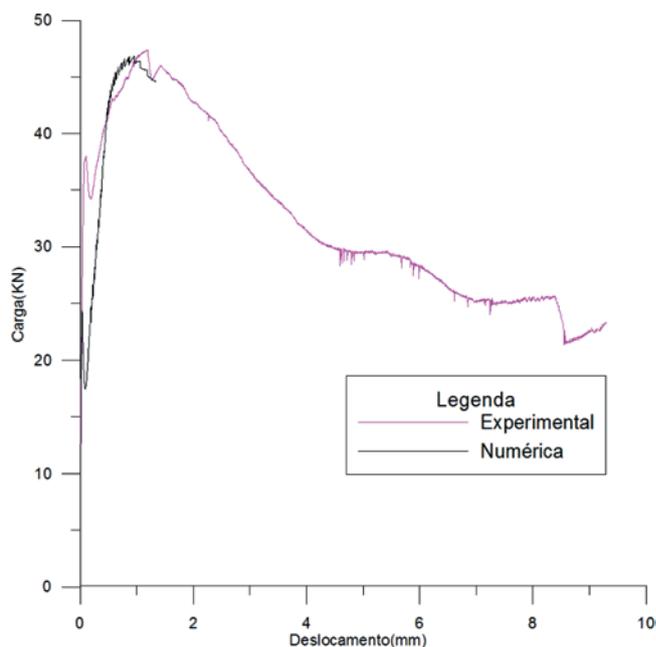
Já a Figura 23 apresenta o comportamento carga *versus* deslocamento numérico e experimental da viga V8, com 0,75% de fibras. Para esta viga, a análise numérica não conseguiu obter resultados após valores superiores a 80 kN, devido a intensa danificação no sistema. A força de serviço dessa viga, que atingiu um máximo de

138,21 kN, foi estimada em 55,29 kN. Para este carregamento, o deslocamento no meio do vão medido no ensaio foi de 0,730 mm. O resultado do modelo numérico para esse carregamento foi um deslocamento de 1,398 mm, isto é, um erro de 92%. Para forças inferiores a 53 kN, o modelo de dano apresentou um erro bem

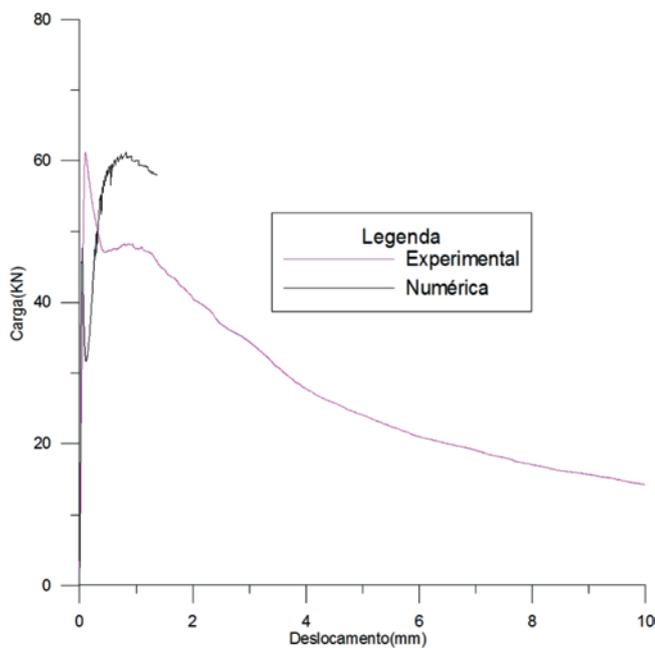
Figura 18 - Curva numérica versus experimental para corpos de prova da viga V7 de Oliveira (17) com 0,50% de fibras



A Corpo de prova de 100 mm x 100 mm x 450 mm

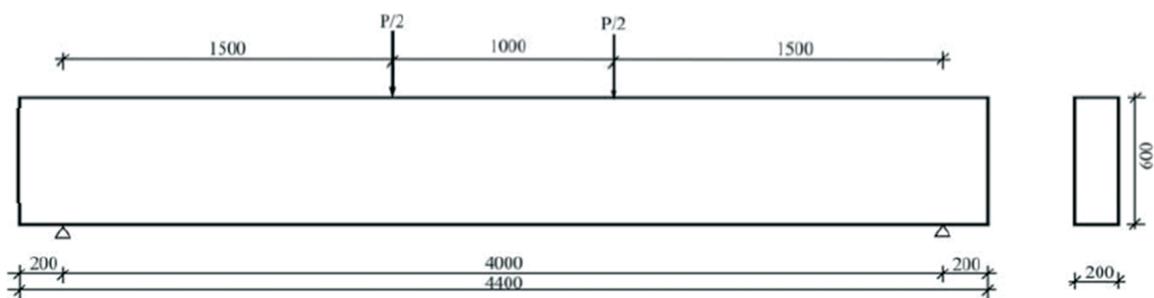


B Corpo de prova de 150 mm x 150 mm x 500 m

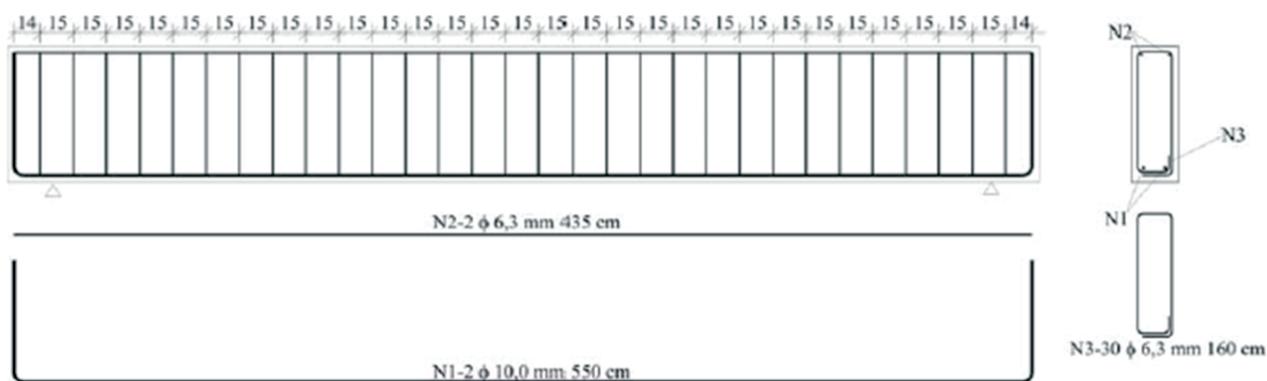


C Corpo de prova de 200 mm x 200 mm x 800 mm

Figura 19 - Viga ensaiada numericamente com embasamento na geometria de Oliveira (18)



A Geometria da viga ensaiada por Oliveira (18)



B Armadura da viga ensaiada por Oliveira (18)

Figura 20 - Curvas numérica e experimental da viga V7 de Oliveira (17)

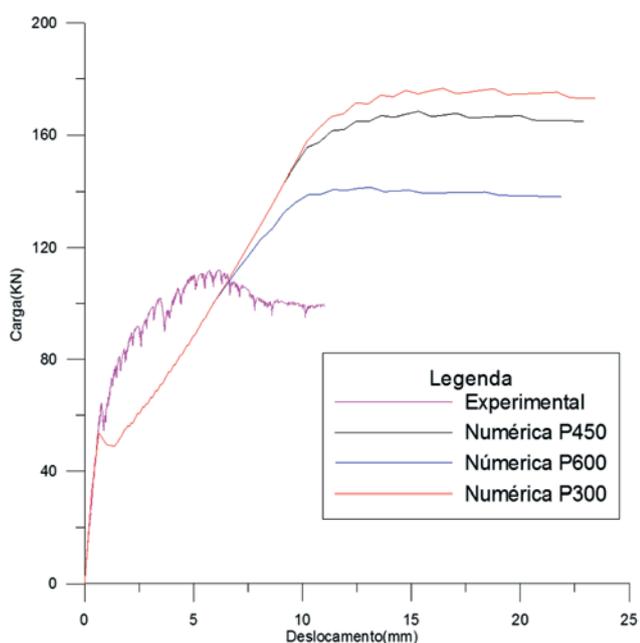


Figura 21 - Danificação a tração (D_t) na viga V7 de Oliveira (17) para força específica

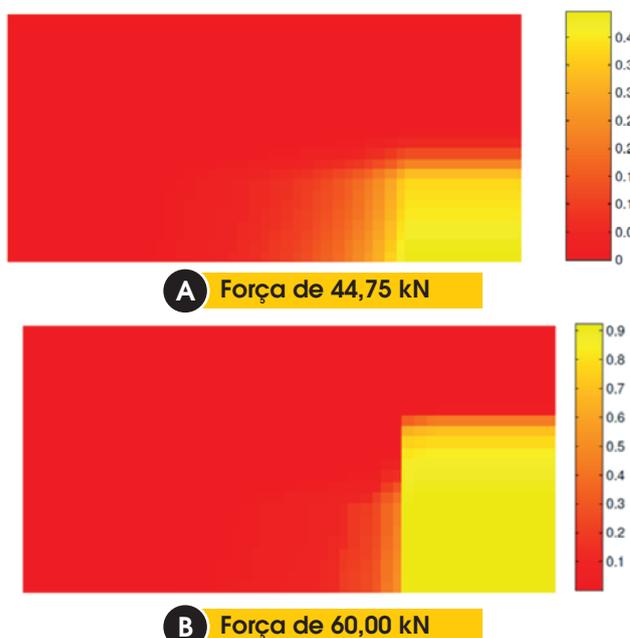


Figura 22 - Comparação do dano na primeira camada dos elementos da viga V7

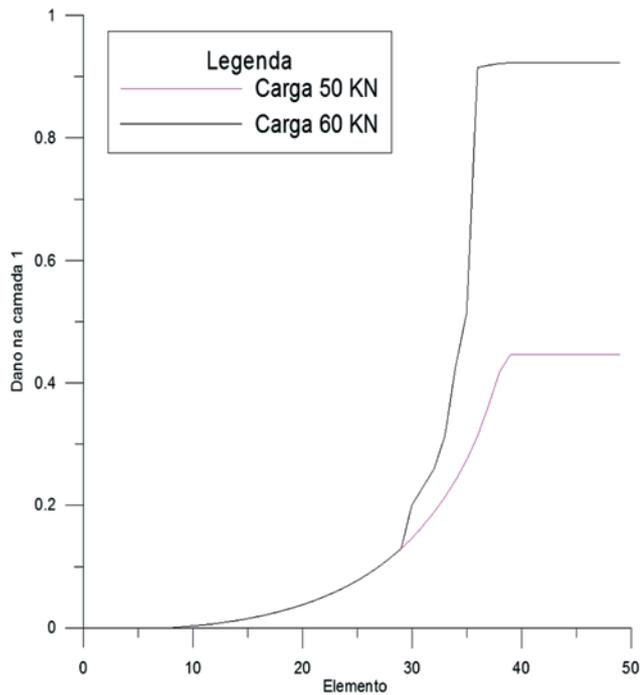


Figura 24 - Carga versus deslocamento numérico e experimental da viga V9 de Oliveira (17)

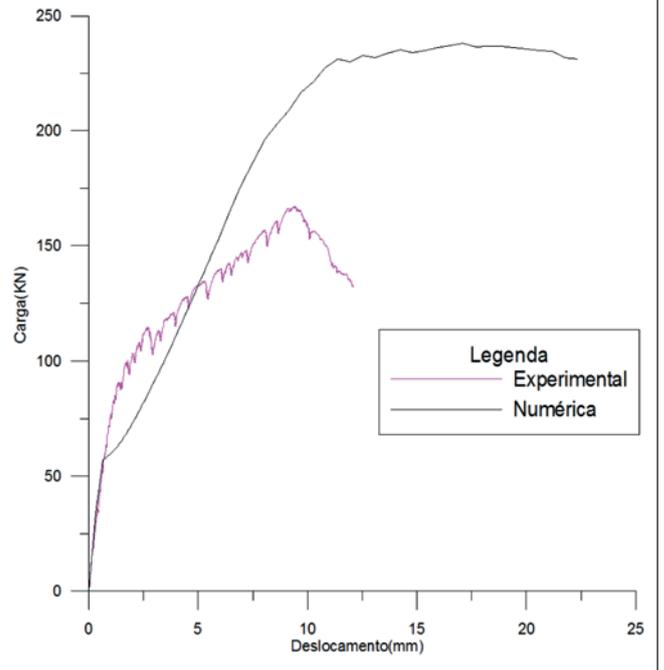


Figura 23 - Carga versus deslocamento numérico e experimental da viga V8 de Oliveira (17)

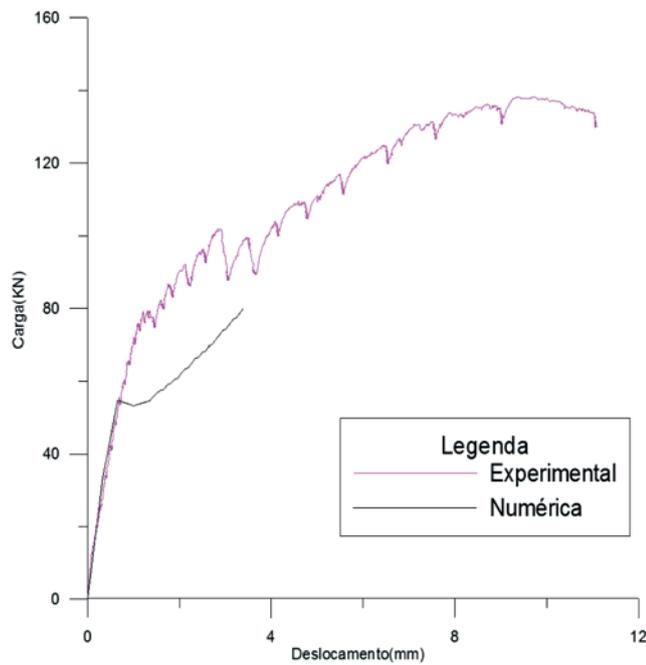


Figura 25 - Identificação paramétrica através da viga V7 com 0,5% de fibras

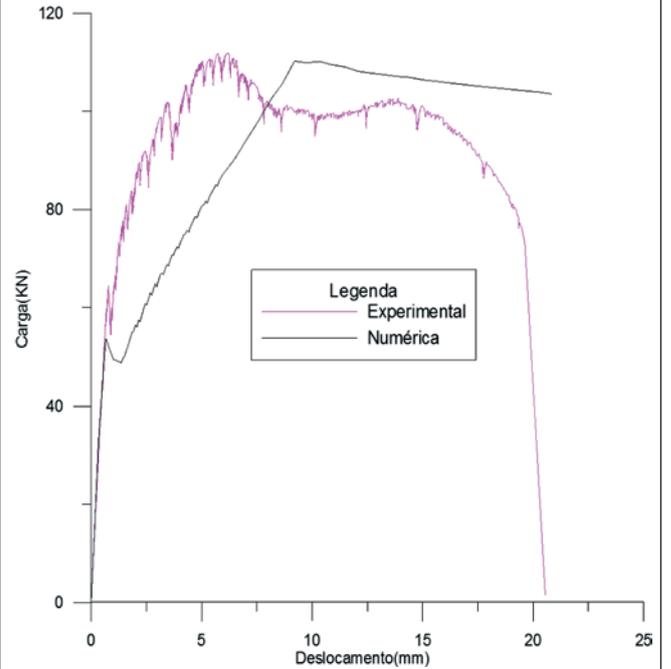


Figura 26 - Identificação paramétrica através da viga V8 com 0,75% de fibras

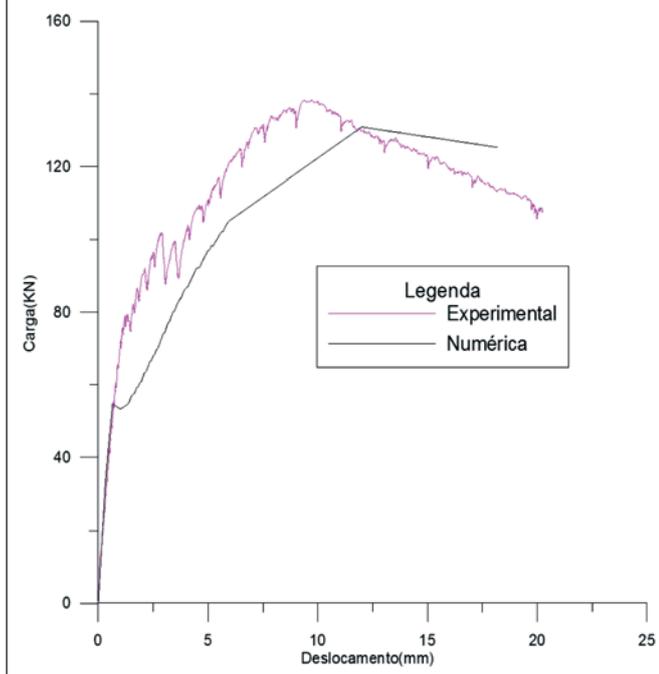
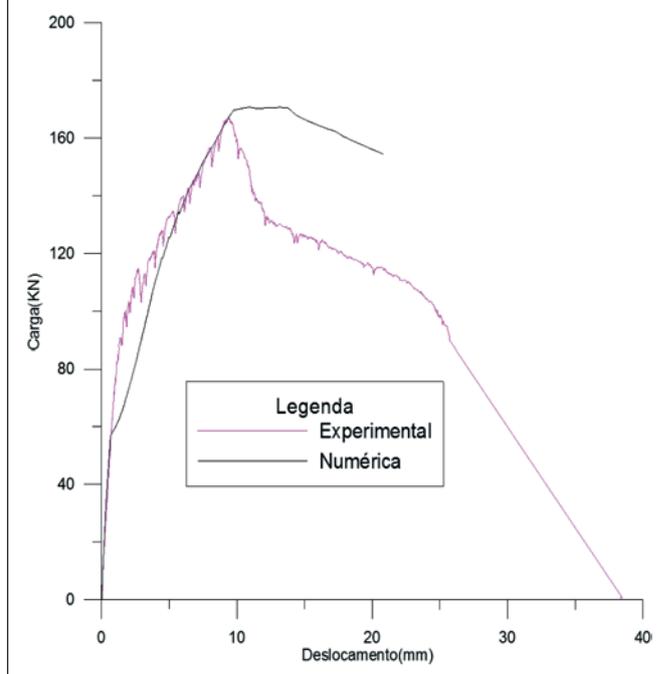


Figura 27 - Identificação paramétrica através da viga V9 com 1,25% de fibras



menor quando comparado com o deslocamento medido no ensaio da viga. Por exemplo, para uma força de 52,11 kN o erro foi de apenas 7%. Neste caso, a flecha avaliada pelo modelo de cálculo da NBR 6118 fornece um deslocamento de 0,510 mm. Esse valor é 23% menor que o observado no ensaio.

Para a viga V9, o comportamento numérico e experimental é apresentado na Figura 24. A força de serviço dessa viga foi estimada em 66,84 kN. Neste caso, o deslocamento obtido do ensaio foi de 0,844 mm e na modelagem pelo modelo de dano o deslocamento foi de 1,56 mm, isto é, 87% maior. Como na viga V8, entretanto, em carregamentos inferiores houve uma boa convergência dos resultados. Por exemplo, para o carregamento de 58,62 kN o erro no valor do deslocamento diminuiu para 17%. Neste caso, a flecha avaliada pelo modelo de cálculo da NBR 6118 fornece um deslocamento de 0,512 mm. Esse valor é 30% menor que o observado no ensaio.

Para uma avaliação da possível influência da orientação das fibras de aço no ensaio dos corpos de prova, as três vigas do exemplo III foram simuladas novamente a fim de encontrar novos parâmetros para o modelo de homogeneização. Neste caso, a retroanálise foi realizada na resposta experimental das próprias vigas. A Figura 25 a 27 apresenta as curvas carga *versus* deslocamento para os novos parâmetros do modelo de La Borderie, os quais são mostrados na Tabela 19.

Primeiramente, nota-se uma melhor aproximação na força de ruína obtida do modelo computacional quando comparado aos valores obtidos do ensaio. Entretanto, ainda se nota uma divergência na resposta do modelo computacional após a concentração do dano no meio do vão. Essa divergência tende a diminuir com o

aumento do volume de fibras, já que neste caso houve uma maior distribuição das fissuras ao longo das vigas ensaiadas. Outra observação importante é que os parâmetros do modelo de homogeneização variam com o volume de fibras, como era de se esperar do próprio modelo de La Borderie. Entretanto, eles apresentam pequena variação para volumes de fibras superiores a 0,75%, o que se refere, aproximadamente, ao volume crítico de fibras para essa matriz.

4. Conclusões

Primeiramente, é importante ressaltar a funcionalidade do modelo de dano na análise do regime de serviço das peças estudadas, pois foi possível perceber que em regiões medianas do regime de serviço (definido neste trabalho como cerca de 40% da carga de ruína) o modelo numérico se comportou bem, apresentando baixos erros em relação ao ensaio experimental.

Outro fato observado em todos os exemplos é o alto processo de danificações nas camadas mais tracionadas, mesmo em regime de serviço. Isto é um fator preponderante nesta análise, visto que o modelo representa bem zonas de microfissuração distribuída. Na medida em que esse padrão de fissuração se intensifica, naturalmente há a junção das microfissuras que levam ao processo de fratura do material. Dessa forma, na medida em que o carregamento aumenta e o processo de fissuração se intensifica, é esperado que o modelo de dano passe a apresentar problemas de convergência na sua resposta numérica, fato que fica evidenciado nas situações após o regime de serviço. Essa característica é mais acentuada nos prismas de concreto simples ou com baixo volume

de fibras, onde há a formação de fraturas localizadas devido à ausência da armadura de flexão. Assim, o modelo de dano, por ser distribuído, não consegue capturar o efeito da localização de deformação. Em trabalho futuro, pretende-se investigar o problema de localização descrito aqui com a utilização de uma modelagem 2D acoplado um modelo de fratura ao modelo de danificação.

Um fator preponderante na análise numérica de estruturas é a identificação paramétrica do material utilizado na modelagem. Foi possível observar que as respostas obtidas na modelagem das vigas no exemplo III se distanciaram da resposta experimental no regime pós pico. Além do modelo de dano não considerar a situação de formação de fraturas, uma observação importante é o fato da possível influência do efeito escala e do efeito de orientação das fibras nas vigas. Em ambos os exemplos, II e III, a identificação paramétrica das propriedades do material foi realizada em corpos de prova prismáticos com dimensões menores que as das vigas. Como o modelo de dano utilizado não leva em conta esses dois fatores, pode ser que a resposta numérica tenha sido afetada, fazendo com que as vigas tenham uma resistência numérica acima do valor obtido dos ensaios. Esse efeito foi sentido com mais intensidade no exemplo III. Com a mudança do tamanho dos corpos de prova prismáticos da viga V7, houve alteração nos parâmetros de entrada da homogeneização e, consequentemente, na resposta numérica da viga. A influência da dimensão do elemento na orientação das fibras pode ser evidenciada quando a identificação dos parâmetros da homogeneização do modelo foi realizada nas próprias vigas. Neste caso, houve redução da tensão de pico do modelo quando comparado aos valores obtidos dos corpos de prova, o que indica menor orientação das fibras na direção longitudinal das vigas, e o aumento dessa tensão na viga não foi proporcional ao aumento do volume de fibras. Para o exemplo II é importante ressaltar que mesmo com as limitações da modelagem, a mesma conseguiu obter êxito em trechos iniciais do regime de serviço e na questão da representação da carga de pico experimental, conclusão que é explicada devido ao fato das dimensões da seção transversal do prisma e da viga se aproximarem.

Concluiu-se que o modelo de Dano pode ser aplicado na análise de vigas de concreto armado com reforço fibroso, sendo que os resultados apresentados neste trabalho validam o emprego do modelo principalmente em regime de serviço. Em uma análise preliminar, quando a resposta desse modelo é comparada com o deslocamento avaliado pelo critério especificado na NBR 6118 (ABNT, 2003) para elementos lineares, o modelo de dano tende a fornecer valores mais próximos dos observados nos ensaios. Contudo, essa afirmação deve ser melhor investigada em trabalhos futuros.

5. Agradecimentos

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo suporte financeiro fornecido durante a realização do trabalho.

6. Referências bibliográficas

- [1] MATALLAH, M.; LA BORDERIE, C. Inelasticity–damage-based model for numerical modeling of concrete cracking, *Engineering Fracture Mechanics*, v. 76, pp. 1087–1108, 2009.
- [2] BIELSKI, J.; SKRZYPEK, J. J.; KUNA-CISKAL, H. Implementation of a model of coupled elastic-plastic unilateral damage material to finite element code. *International Journal of Damage Mechanics*, v. 15, pp. 5–39, 2006.
- [3] PITUBA, J. J. C.; FERNANDES, G. R.. Anisotropic damage model for concrete. *Journal of Engineering Mechanics*, v. 137, pp. 610–624, 2011.
- [4] LA BORDERIE, C. Phenomenes unilateraux dans un materiau endommageable: modelisation et application a l'analyse de structures en beton. Tese (Doutorado em Engenharia), Universidade de Paris, Paris, 1991, 140 p.
- [5] LI, F., LI, Z. Continuum damage mechanics based modeling of fiber reinforced concrete in tension. *International Journal of Solid and Structures*. Hong Kong, v. 38, p. 777–793, 1999.
- [6] LEE, H. K., LIANG, Z. Computational modeling of the response and damage behavior of fiber reinforced cellular concrete. *Computers & Structures*. USA, v. 82, p. 581–592, 2004.
- [7] HAMEED, R., SELIER, A., TURATSINZE, A., DUPRAT, F. Damage modeling of metallic fiber-reinforced concrete. *Engineering Procedia*. France, v. 10, p. 1670–1678, 2011.
- [8] PASA, V. F. Análise do comportamento de estruturas de concreto reforçado com fibras de aço via método dos elementos finitos. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas), Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2007, 130 p.
- [9] GUELLO, G. A. Simulação computacional de estruturas de concreto por meio da mecânica do dano. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas), Escola Politécnica de São Paulo, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2002, 105 p.
- [10] PITUBA, J. J. C. Sobre a formulação de um modelo de dano para concreto. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas), Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2003, 151 p.
- [11] COMI, C.; PEREGO, U. A bi-dissipative damage model for concrete with applications to dam engineering. *European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering (ECOMAS 2000)*, 2000.
- [12] RAMTANI, S.; BERTHAUD, Y.; MAZARS, J. Orthotropic behavior of concrete with directional aspects: modeling and experiments. *Nuclear Engineering Design*, v. 133, pp. 97–111, 1992.
- [13] VELASCO, R. V. Concretos auto-adensáveis reforçados com elevadas frações Volumétricas de fibras de aço: propriedades reológicas, Físicas, mecânicas e térmicas. Tese (Doutorado em Ciências em Engenharia Civil), Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2008, 349 p.
- [14] ABNT – ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR 15530: Fibras de aço para concreto – Especificação. Rio de Janeiro, 2007, 7 p.
- [15] LOPES, M. M. Substituição parcial de armadura de flexão por fibras de aço em vigas de concreto. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil), Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2005, 155 p.
- [16] PEREIRA JUNIOR, W. M. Análise numérica de estruturas de concreto com fibras utilizando mecânica do dano. Dissertação (Mestrado em Geotecnia, Estruturas e Construção Civil s), Escola de Engenharia Civil da Universidade de Goiás, Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2014, 157 p.

- [17] OLIVEIRA, C. A. S. Avaliação da redução de armadura mínima de flexão em vigas de concreto armado com adição de fibras de aço. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil), Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2008, 231 p.
- [18] BENTUR, A., MINDESS, S. Fiber Reinforced Cementitious Composites. Elsevier Science, 1990.