



# Orientación y coevaluación: Dos aspectos clave para la evolución del proceso de resolución de problemas

## Orientation and Peer Assessment: Two key aspects for the evolution of the problem-solving process


Alba Torregrosa\*

 ORCID id 0000-0001-7954-3507

Lluís Albarracín\*\*

 ORCID id 0000-0002-1387-5573

Jordi Deulofeu\*\*\*

 ORCID id 0000-0002-5834-0863

### Resumen

El presente estudio toma como objetivo describir y comparar las distintas fases de desarrollo de una base de orientación no lineal elaborada por un grupo de 25 alumnos de sexto de primaria al resolver cuatro problemas de patrones matemáticos. Se realiza un análisis cualitativo de los ítems que aparecen en las distintas fases de desarrollo de la base de orientación no lineal a partir de las producciones del alumnado y de los cuestionarios de coevaluación que sirven como método de feedback. Nuestros resultados enfatizan que, de una fase a otra, la base de orientación no lineal experimenta cambios en cuanto a la planificación, revisión y explicación del proceso de resolución que ayudan al alumnado a verbalizar, de un modo más exhaustivo, tanto el método de resolución como los procesos metacognitivos llevados a cabo.

**Palabras clave:** Base de orientación no lineal. Evaluación. Problemas de patrones. Educación primaria. Metacognición.

### Abstract

This study aims at comparing and describing the different development phases in a non-linear orientation base elaborated by 25 students in sixth grade when they solve four pattern mathematical problems. A qualitative analysis of the items that appear in the different phases of development in the non-linear orientation base is done based on the students' productions and peer assessment questionnaires that serve as a feedback method. Our results emphasize that, from one phase to another, the non-linear orientation base undergoes through changes in terms of planning, reviewing, and explaining the resolution process that help students verbalize in a more comprehensive way both, the resolution method and the metacognitive processes carried out.

**Keywords:** Non-linear orientation base. Assessment. Pattern problems. Elementary education. Metacognition.

---

\* Doctoranda de Didáctica de las Matemáticas en la Universitat Autònoma de Barcelona (UAB). Profesora asociada en el Dpt. de Didàctica de la Matemàtica i les Ciències Experimentals de la Universitat Autònoma de Barcelona (UAB), Bellaterra, Barcelona, España. E-mail: [alba.torregrosa@uab.cat](mailto:alba.torregrosa@uab.cat).

\*\* Doctor en Didáctica de las Matemáticas por la Universitat Autònoma de Barcelona (UAB). Profesor Serra-Hünter en el Dpt. de Didàctica de la Matemàtica i les Ciències Experimentals de la Universitat Autònoma de Barcelona (UAB), Bellaterra, Barcelona, España. E-mail: [lluis.albarracin@uab.cat](mailto:lluis.albarracin@uab.cat).

\*\*\* Doctor en Didáctica de las Matemáticas por la Universidad Autónoma de Barcelona (UAB). Profesor Titular en el Dpt. de Didàctica de la Matemàtica i les Ciències Experimentals de la Universitat Autònoma de Barcelona (UAB), Bellaterra, Barcelona, España. E-mail: [jordi.deulofeu@uab.cat](mailto:jordi.deulofeu@uab.cat).

## 1 Introducción

La resolución de problemas se encuentra en el núcleo de la actividad matemática y, desde hace algunas décadas, ha sido una parte esencial de la educación matemática estando presente en todas las aulas de educación obligatoria y postobligatoria. En la literatura no existe un consenso sobre qué entendemos por resolución de problemas. Grugnetti y Jaquet (2005) sugieren que esta falta de consenso se debe a las diferentes visiones existentes sobre la naturaleza de la actividad matemática. En el presente estudio, entendemos el término problema matemático como sinónimo de problema no rutinario. En palabras de Mayer (1985, p. 123):

Un problema no rutinario aparece cuando un individuo se encuentra con una situación dada, tiene la intención de alcanzar lo que se le pide, pero no sabe un camino directo para acceder o realizar el objetivo. La principal característica de estos problemas es la ignorancia del resolutor del problema respecto al método de resolución.

Encontramos distintos factores que afectan al proceso de resolución de un problema. Éstos son los conocimientos, el control, las creencias y los afectos, y los factores contextuales (LESTER; GAROFALO; KROLL, 1989; SCHOENFELD, 2007). Cuando hablamos del control del resolutor, nos referimos a los procesos metacognitivos (SCHOENFELD, 1992) y en concreto, los procesos de regulación, evaluación y monitoreo (CLARKE, 1989). Estudios previos, llevados a cabo en periodos educativos obligatorios, han señalado la importancia de verbalizar los procesos metacognitivos con la finalidad de desarrollar habilidades matemáticas complejas presentes en resolutores expertos (WILSON; CLARKE, 2004).

Entendemos como procesos metacognitivos las acciones de regulación, evaluación y monitoreo que desarrolla un resolutor al resolver un problema matemático (CLARKE, 1989). Encontramos una amplia variedad de estudios que examinan la metacognición matemática en términos cuantitativos (ARTZ; ARMOUR-THOMAS, 1992; SCHRAW; DENISSON, 1994) pero pocos que lo hagan en términos cualitativos debido a la dificultad que comporta analizar un proceso mental, especialmente, en resolutores de baja edad (CAVANAUGH; PERLMUTTER, 1982).

Atendiendo a la importancia de verbalizar y evaluar cualitativamente el proceso metacognitivo durante la resolución de problemas, en Torregrosa, Albarracín y Deulofeu (2020) caracterizamos los procesos metacognitivos presentes durante la resolución de problemas de lógica y patrones matemáticos, cuando el alumnado usaba un instrumento de autorregulación llamado base de orientación de la acción (JORBA; SANMARTÍ, 1996). Nuestros resultados mostraron que la base de orientación de la acción promovía que el alumnado pautara, estructurara y verbalizara por escrito procesos metacognitivos complejos.

Encontramos, por un lado, una estrecha relación entre la verbalización explícita de la resolución escrita y la regulación del proceso de resolución, entendida como la adaptabilidad en la elección y desarrollo de la estrategia de resolución. Así pues, aquellas producciones en las que el alumnado detallaba exhaustivamente el proceso de resolución, añadiendo anotaciones referentes a procesos metacognitivos, eran las que mostraban más éxito tanto en hallar la solución correcta como en seleccionar la estrategia adecuada. Por otro lado, observamos que la linealidad de la base de orientación de la acción, presentada como un listado paso a paso, dificultaba el proceso de resolución de un problema, ya que este proceso no se produce de manera lineal (MAYER, 1985). Así pues, desarrollamos un instrumento llamado base de orientación no lineal que mantenía las condiciones iniciales de la base de orientación de la acción (JORBA; SANMARTÍ, 1996) pero se estructura en un formato de diagrama no secuencial que sigue las fases de resolución de Polya (1945).

En el presente estudio mostramos una experiencia llevada a cabo con un grupo de 6º grado de educación primaria al usar, por primera vez, una base de orientación no lineal en un ciclo de resolución y evaluación de cuatro problemas de lógica y patrones matemáticos. Nos planteamos como objetivo describir y comparar las distintas fases de desarrollo de una base de orientación no lineal elaborada por un grupo clase de sexto de primaria.

La investigación que se presenta muestra, a nivel teórico, el proceso de creación, desarrollo, uso y evaluación de la base de orientación no lineal. A nivel práctico, se realiza un análisis de los cambios que introducen los alumnos en la base de orientación no lineal durante la secuencia matemática propuesta. Aunque se han hecho algunas aproximaciones en otras áreas de conocimiento, no existe en la literatura ningún estudio en el área de educación matemática que trabaje usando una base de orientación no lineal en resolución de problemas.

Por lo tanto, nuestra investigación persigue una doble finalidad. En primer lugar, pretendemos señalar qué aspectos clave aparecen en las distintas fases de desarrollo de la base que nos muestran una evolución del pensamiento matemático derivado del proceso de resolución de un problema. En segundo lugar, pretendemos mostrar la importancia de la autoevaluación, y sobre todo la coevaluación, como métodos de feedback tanto en la construcción de la base de orientación no lineal como en el proceso de resolución de un problema.

## 2 Marco teórico

### 2.1 La metacognición en resolución de problemas

Cuando un resolutor se enfrenta a la resolución de un problema, activa una serie de mecanismos, tanto cognitivos como metacognitivos, y los encadena siguiendo procesos mentales sumamente complejos (SCHOENFELD, 1992). Flavell (1979 *apud* CAMPANARIO; OTERO, 2000, p. 232) define la metacognición como “el conocimiento sobre los propios procesos y productos cognitivos, así como el conocimiento sobre las propiedades de la información, datos relevantes para el aprendizaje o cualquier cosa relacionada con los procesos y productos cognitivos”. La línea que separa los términos cognición y metacognición es sumamente fina. La mayoría de los procesos mentales que desarrollamos son de carácter metacognitivo, pero necesitamos de los procesos cognitivos para que éstos se produzcan (SCHOENFELD, 1989).

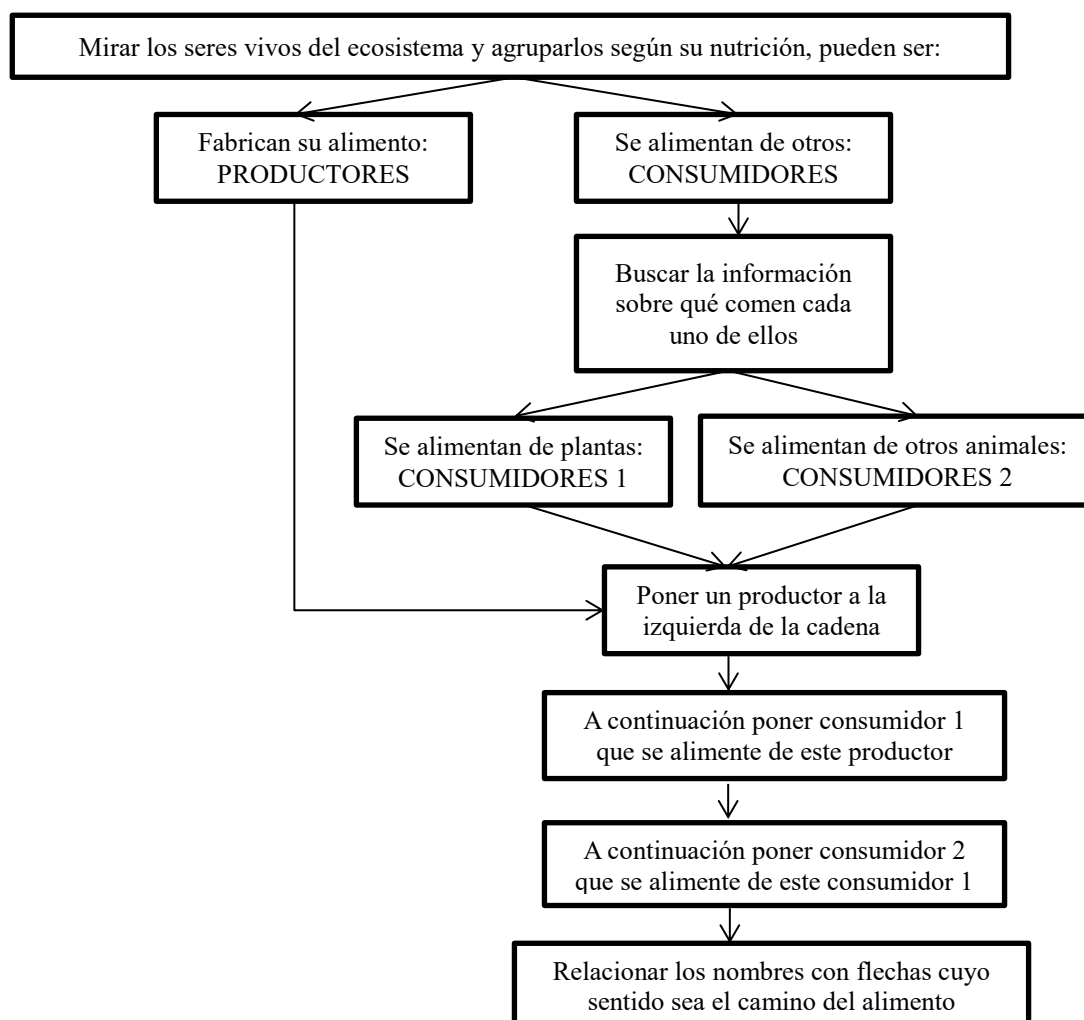
Dentro de los procesos metacognitivos diferenciamos dos categorías (CALLAHAN, 1987): el conocimiento de la cognición y la regulación de la cognición. Cuando hablamos de conocimiento de la cognición, nos referimos a: conocer qué o conocimiento declarativo, conocer cómo o conocimiento procedimental y conocer cuándo o conocimiento condicional. Cuando hablamos de regulación de la cognición, nos referimos a aquellos procesos referentes a la consciencia (toma de consciencia y uso efectivo de tales decisiones), la regulación (monitoreo y efectividad de aplicación de estrategias) y la evaluación (de la situación y solución).

Dada la complejidad a nivel metacognitivo que presenta el proceso de resolución de un problema, Clarke (1989) hizo especial hincapié en la categoría referente a la regulación de la cognición tratando de observar qué ciclo metacognitivo seguía el alumnado al resolver un problema matemático. Una de las conclusiones más relevantes a las que llegó el autor fue la imposibilidad de determinar, ante un mismo problema, uno o varios ciclos metacognitivos generalizables para todos los resolutores que caracterizaran procesos que siempre se dieran del mismo modo y en el mismo momento. Este hecho nos lleva a realizar dos afirmaciones relevantes para el presente estudio. En primer lugar, el análisis de los procesos metacognitivos que lleva a cabo el alumnado durante la resolución de un problema puede ser una de las claves para comprender el éxito y/o el fracaso durante la resolución tal y como observamos en Torregrosa, Deulofeu y Albarracín (2019). En segundo lugar, analizar los procesos metacognitivos que lleva a cabo el alumnado requiere del uso de diversos instrumentos de

recogida de datos, así como una minuciosa triangulación, puesto que la metacognición se da de manera mental, subjetiva y difícilmente se verbaliza con claridad (GODINO; LLINARES, 2000).

## 2.2 La base de orientación como instrumento de autorregulación

La base de orientación no lineal (BONL) es un instrumento de autorregulación matemática (TORREGROSA; ALBARRACÍN; DEULOFEU, 2020) que parte de la base de orientación de la acción, un instrumento desarrollado por Jorba y Sanmartí (1996) que fue ideado para orientar al alumnado en su explicación de modelos científicos, teóricos y prácticos, de la ciencia y la matemática (Figura 1).



**Figura 1** – Ejemplificación de una base de orientación de la acción de carácter general construida por una alumna de 1º de BUP; construcción de una cadena trófica  
Fuente: García y Sanmartí (1998, p. 12)

Nos referimos a él como instrumento de autorregulación puesto que persigue la

finalidad de regular los propios procesos metacognitivos matemáticamente relevantes en resolución de problemas. Las premisas que justifican la base de orientación no lineal, parten de la base de orientación de la acción. Así pues, concretamos, en primer lugar, qué es una base de orientación de la acción para proceder a exponer qué cambios sustanciales encontramos respecto a la base de orientación no lineal.

#### La base de orientación de la acción:

Es un instrumento ideado para promover que el alumnado desarrolle su capacidad de anticipar y planificar las operaciones necesarias para realizar una acción. A través de ella se pretende que explicita los procesos que se deben realizar o que se han realizado al ejecutar una tarea, o las características que permiten definir un modelo o un concepto. [...] La base de orientación ayuda a desarrollar la habilidad de seleccionar las características relevantes y a anticipar un plan de acción (GARCÍA; SANMARTÍ, 1998, p. 10-11).

Para poder desarrollar una base de orientación de la acción debemos concretar: qué objetivo pretendemos alcanzar, determinar qué conocimientos hemos trabajado con el alumnado y qué conocimientos pretendemos desarrollar, y por último, bajo qué condiciones la construiremos como ejemplificación de un caso particular hacia una categoría más general (NUNZIATI, 1990). La base de orientación se puede caracterizar mediante diversos parámetros relacionados con su contenido (TALÍZINA, 1988) como puede ser la forma de la presentación (material, materializada, verbal externa...), el nivel de generalización (particular o general), la completitud (de muy completa a poco completa) y la manera en que los alumnos acceden a ella, dependiendo de si la elabora el docente o la elaboran los propios estudiantes, a partir de un método general.

Atendiendo a los parámetros anteriores, las investigaciones previas han mostrado que la forma de presentación, al depender del nivel educativo y del grupo clase, no tiene un impacto altamente relevante en su aplicación (JORBA; SANMARTÍ, 1996). A su vez, las bases de orientación poco completas, no reflejan completamente las necesidades de la actividad que orientan. Teniendo en cuenta estos dos indicadores, se pueden considerar cuatro tipos de bases de orientación (Cuadro 1):

Tipo	Completitud	Nivel de generalización	Modo de acceso
1	Completa	Particular	Preparada
2	Completa	General	Preparada
3	Completa	General	Elaborada por el alumno
4	Completa	Particular	Elaborada por el alumno

**Cuadro 1** – Tipos de bases de orientación  
Fuente: Jorba y Sanmartí (1996, anexo IV. 4)

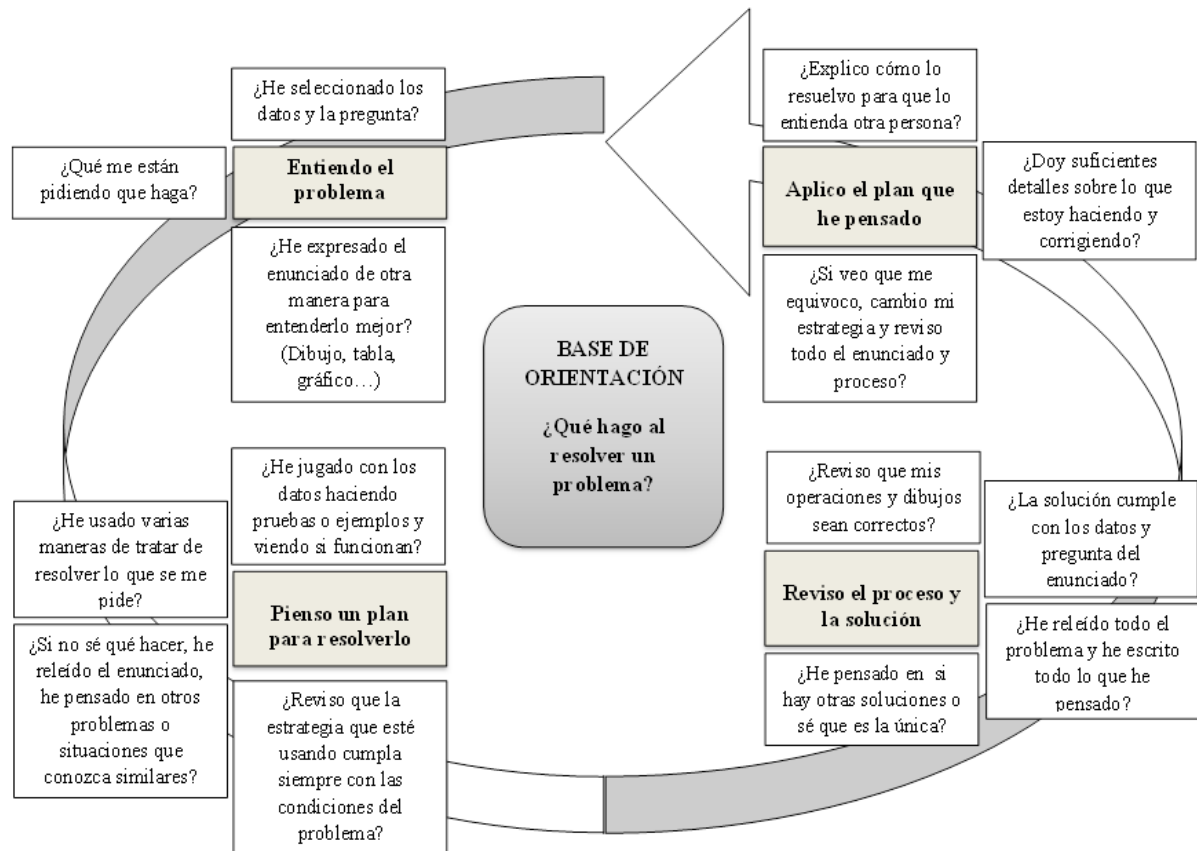
Tal y como podemos observar en el Cuadro 1, y atendiendo a las premisas antes comentadas, la base de orientación de la acción que se ha mostrado más efectiva es la de tipo

3, ejemplificada en la Figura 1. En este ejemplo la base es elaborada por la propia alumna – con lo que tiene un alto nivel de significatividad para ella – y, además, le permite explicar un constructo científico general, como es la construcción de una cadena trófica, diferenciando aquellos seres que son productores de aquellos que son consumidores de plantas o animales.

Si la base ejemplificada en la Figura 1 hubiera sido elaborada por el docente en vez de por la alumna, nos encontraríamos ante una base de tipo 2, es decir, general y preparada. En este caso, el nivel de significatividad de la base sería menor puesto que no es la propia alumna quien construye el constructo científico. Finalmente, si la alumna hubiera elaborado previamente una base que le permitiera identificar los tipos de seres vivos que son sólo productores, nos encontraríamos ante una base de tipo 4, es decir, particular y elaborada por la alumna. En este último caso, la alumna identificaría un aspecto particular – los productores – dentro de un constructo más general – la cadena trófica.

En el caso de las bases de tipo 3 y 4, elaboradas por el propio alumnado, podemos encontrar tantas bases de orientación distintas como alumnos tengamos en el aula; cuanto más personalizada, más comprensible y significativa será para el alumno. Siguiendo a Jorba y Sanmartí (1996), al planificar la creación de la base de orientación, debemos tener en cuenta procesos referentes a: elementos estructurales de la acción (motivo de la tarea, objetivo, condiciones de realización, operaciones de la acción...), anticipación de la acción (posibles estrategias y resultado esperado) y planificación de la acción (elección de la estrategia y plan de trabajo).

Villalonga y Deulofeu (2017) quisieron aplicar la base de orientación de la acción a procesos no lineales, como la resolución de un problema matemático. Una de las conclusiones más relevantes de su estudio fue que el alumnado tomaba la base de orientación como una serie de pasos a seguir y no como indicadores de planificación o sugerencia durante la resolución: “se confirma así que la resolución un problema es una dinámica compleja, en ningún caso lineal, que requiere de tiempo, reflexión y dedicación” (VILLALONGA; DEULOFEU, 2017, p. 279). Dadas las aportaciones de los autores anteriores, en un estudio previo (TORREGROSA; DEULOFEU; ALBARRACÍN, 2019) observamos que era posible usar la base de orientación de la acción, eliminando su formato listado. En este momento, creamos la base de orientación no lineal (BONL, Figura 2), siguiendo las fases de Polya (1945), las premisas dadas por Jorba y Sanmartí (1996) y Villalonga y Deulofeu (2017), así como los procesos metacognitivos apuntados por Clarke (1989).



**Figura 2** – Ejemplificación de base de orientación no lineal (BONL)  
Fuente: elaboración propia

Para iniciar la construcción de una BONL, se recomienda partir de la resolución de un primer problema con la finalidad de que el alumnado tenga una base de trabajo previa (VILLALONGA; DEULOFEU, 2015). Al finalizar la resolución, el alumnado debe compartir en gran grupo las destrezas matemáticas (PUIG, 1996) y los procesos metacognitivos llevados a cabo para conocer cómo han avanzado, a medida que han ido resolviendo el problema, y porqué han decidido hacerlo de un determinado modo.

Este proceso se puede llevar a cabo de distintos modos, dependiendo de la edad de los resolutores. En los últimos cursos de educación primaria, se recomienda que, inicialmente, el docente elabore un esquema con cuatro ramificaciones que corresponden a las cuatro fases de resolución de un problema (POLYA, 1945): comprensión del problema, elaboración del plan de acción, aplicación del plan de acción y revisión del proceso y solución. Posteriormente, el docente debe abrir una discusión con el alumnado cuestionando qué acciones han llevado a cabo en cada una de las fases de resolución.

En la Figura 2 se muestra un ejemplo de la tipología de preguntas que el docente puede formular para cada una de las fases de resolución del problema. El papel del docente en esta discusión consiste en recuperar las respuestas e ideas del alumnado, confrontarlas entre ellas y



formular preguntas que permitan a los alumnos debatir la idoneidad de sus destrezas y procesos individuales en comparación a los de sus compañeros. La finalidad de esta discusión es recopilar en la base aquellas acciones que el grupo considere claves para poder resolver un problema como el presentado.

A medida que el alumnado usa la BONL al resolver problemas, ésta debe ir ampliándose con nuevas destrezas matemáticas y procesos metacognitivos relacionados con la resolución. La base de orientación no lineal no es un instrumento que se crea y permanece inmutable, sino que evoluciona a medida que el conocimiento del alumnado y su uso también evolucionan. Con la finalidad de diferenciar cómo y cuándo la base se modifica, llamaremos fases de desarrollo a los momentos en los que la base sufre cambios sustanciales en su estructura debido a la introducción o modificación de las destrezas y procesos que en ella aparecen. El número de fases de desarrollo dependerá de la cantidad de veces que se revise el contenido de la base de orientación no lineal.

Uno de los puntos más relevantes al construir una BONL con el alumnado, es cómo evaluamos el proceso de construcción y desarrollo del instrumento tanto para saber qué grado de apropiación de la base tiene el alumnado, como para validar su pertinencia y adecuación a los problemas propuestos. La autoevaluación, como método de feedback, permite al alumnado cuestionar sus procedimientos y reflexionar sobre sus acciones. Por su parte, la coevaluación permite al alumnado reconocer sus potencialidades y errores a partir de identificarlos en las producciones de sus compañeros (SANMARTÍ, 2010).

Los cuestionarios de autoevaluación y coevaluación se han mostrado efectivos para conocer qué destrezas matemáticas y procesos metacognitivos ha llevado a cabo el alumnado en las distintas fases del problema (SANMARTÍ, 2019) que habitualmente no aparecen ni en sus producciones escritas ni en la base de orientación no lineal. Al diseñar dichos cuestionarios, debemos tener en cuenta el periodo educativo en el que se encuentra el alumnado.

En el primer ciclo de educación primaria, podemos usar escalas numéricas de satisfacción, pictogramas, dianas, o bien rúbricas y comentarlas en gran grupo. En los últimos cursos de educación primaria, los formularios escritos sirven al alumnado, y al propio profesorado, como instrumentos de detección de destrezas matemáticas y procesos metacognitivos y a su vez, sirven como fuente de detección de errores.

En el Cuadro 2 se ejemplifica la tipología de preguntas que se pueden incluir en los cuestionarios en relación con las fases de resolución de un problema (POLYA, 1945), que son las que estructuran la base de orientación no lineal. Las preguntas que planteamos al alumnado deben tener un carácter abierto puesto que nuestra pretensión es que expliciten al máximo los

procesos y destrezas llevados a cabo que no han verbalizado por escrito durante la resolución del problema y que por lo tanto, no podemos observar en sus producciones. Sus respuestas nos permiten observar cuáles de estas destrezas y procesos clave no aparecen en la base de orientación no lineal y, por lo tanto, se deben añadir antes de proceder a resolver un nuevo problema (DEULOFEU; VILLALONGA, 2018). Si nos encontramos en cursos inferiores o bien, ante grupos con dificultades de comprensión y expresión escrita, los cuestionarios pueden adoptar un formato oral y pueden ser comentados y discutidos tanto individualmente como en gran grupo. En este caso, al no contar con un formato escrito, se deben grabar las respuestas del alumnado en audio o vídeo.

PREGUNTA	JUSTIFICACIÓN
Imagina que tienes que explicar a un compañero de cuarto de primaria el problema que acabas de resolver. Él no ha visto el problema ni sabe de qué trata. Explícale que te pedía el problema y qué pasos has seguido desde el inicio al final para resolverlo.	Abstracción de las destrezas y procesos generales ha llevado a cabo el alumnado que no aparecen en las producciones escritas
Cuando has terminado de leer el problema por primera vez, ¿qué es lo primero que has pensado que podrías hacer para resolverlo? Basta que cuentes la primera idea que se te ha ocurrido.	Abstracción de los ítems referentes a la fase de planificación
Mientras resolvías el problema, ¿ha habido algún momento en que has cambiado la manera en la que la estabas resolviendo? ¿En qué momento ha sido y porque has cambiado lo que habías pensado?	Abstracción de los ítems referentes a la fase de planificación entorno la regulación y monitoreo metacognitivo
¿Qué conocimientos de matemáticas crees que has utilizado para resolver el problema?	Abstracción de los ítems referentes a la fase de aplicación del plan
¿Crees que has revisado el problema mientras el estabas haciendo, cuando has terminado o en todo momento? ¿Qué es lo que has revisado? (Las operaciones, los dibujos, el enunciado, lo que has escrito...). Cuéntalo.	Abstracción de los ítems referentes a la fase de revisión

**Cuadro 2** – Ejemplificación de las preguntas que pueden aparecer en un cuestionario de autoevaluación.  
Fuente: elaboración propia

### 3 Metodología

La metodología presentada en esta sección, está diseñada para describir y comparar las distintas fases de desarrollo de una base de orientación no lineal elaborada por un grupo clase de sexto de primaria.

Los datos del estudio se recogieron en un centro de titularidad pública que pertenece al barrio de les Corts de Barcelona. Contamos con 25 participantes de sexto grado de educación primaria, con edades comprendidas entre los 11 y 12 años. Durante el horario lectivo, el grupo dispone de una hora semanal llamada *resolución de problemas matemáticos* en la cual no realiza problemas matemáticos en palabras de Mayer (1985), sino que resuelve ejercicios de aplicación directa de algoritmos. Por lo tanto, el alumnado no está familiarizado con la resolución de

problemas en sí misma y tampoco conoce ni ha trabajado anteriormente con ningún tipo de base de orientación.

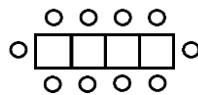
Con la finalidad de presentar la metodología de un modo claro, en primer lugar presentamos los instrumentos que se usaron en el presente estudio, justificando su elección y diseño. En segundo lugar, presentamos cómo se usaron y configuraron temporalmente dichos instrumentos en el aula.

Inicialmente, delimitamos los parámetros de la base de orientación no lineal que el alumnado debía crear. Ésta sería escrita, concreta, medianamente completa y creada por el alumnado. El principal motivo que nos llevó a esta elección fue la nula familiarización del grupo clase con el instrumento. Por lo tanto, consideramos que debíamos partir de un objeto concreto – la resolución de una sola tipología de problemas – y que además, debía ser el propio alumnado quien elaborara la base en formato escrito, ya que facilitaría su revisión constante.

A continuación, seleccionamos cuatro problemas de lógica y patrones matemáticos (Figura 3). La selección de dichos problemas se realizó atendiendo a la flexibilidad que caracteriza los problemas de patrones, entendida como la variabilidad de estrategias de distinta complejidad que se pueden aplicar (CALLEJO; ZAPATERA, 2014). En todos ellos el enunciado escrito se complementaba con un dibujo que facilitaba su comprensión y su resolución en caso de no reconocer métodos aritméticos (VILLALONGA; DEULOFEU, 2015). Los problemas están organizados de más sencillo a más complejo, ateniendo a la dificultad de hallar el patrón. Este hecho posibilita la aparición de destrezas matemáticas y procesos metacognitivos cada vez más complejos.

#### PROBLEMA 1: LA CENA

Queremos organizar una cena con nuestros amigos pero no sabemos a ciencia cierta cuantas mesas necesitamos. Lo que sí que sabemos es que queremos poner mesas en una sola hilera y que los amigos se sentaran tal y como se muestra en el dibujo.



Si somos 40 amigos, ¿cuántas mesas necesitaremos? ¿Y si somos 100?

A última hora nos han confirmado que en total, seremos 143 amigos. Cuando estemos todos sentados, ¿quedará algún sitio vacío en la mesa? ¿Cómo lo harías? Explícalo.

#### PROBLEMA 2: LOS PALILLOS

Anna ha estado jugando a hacer figuras con palillos. Primero ha decidido hacer triángulos de la siguiente manera:



Se ha preguntado ¿cuántos palillos le hacen falta si quiere hacer 10 triángulos siguiendo el mismo patrón que en la figura? ¿Y si quiere hacer 20? ¿Cómo lo harías? Explícalo.

**PROBLEMA 3: LA TABLA NUMÉRICA**

Juliana ha escrito en una tabla los números naturales 1, 2, 3, 4, 5... poniéndolos del tal manera como se muestra en el dibujo:

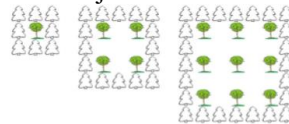
1	4	5	8	9
2	3	6	7	10
11	14	15	18	19
12	13	16	17	20
21	24	25	28	29
22	23	...	...	...

Ha empezado a mirar la tabla y ha decidido sumar los números que tienen un lado en común con el 10. Así pues, ha sumado  $9+7+19=35$ . Luego ha pensado: “Haré lo mismo con otro número. Sumaré los números que tienen un lado en común con el 100”. Pero... creo que no hace falta que dibuje todos los números.

¿Podrías explicar cómo lo ha hecho Juliana? ¿Qué resultado da la suma de los números que tienen un lado en común con el 100? ¿Y con el 1000? ¿Cómo lo harías? Explícalo.

**PROBLEMA 4: LOS PINOS Y LOS NARANJOS**

Un agricultor quiere plantar naranjos siguiendo una forma cuadrada y alrededor quiere plantar pinos. Se imagina el siguiente esquema para 1, 2 y 3 hileras de naranjos:



¿Cuántos pinos le harán falta si quiere plantar 4 hileras de naranjos? ¿Y si quiere plantar 10 hileras? ¿Cómo lo harías? Explícalo.

**Figura 3** – Problemas de lógica y patrones matemáticos usados en la investigación

Fuente: elaboración propia

Posteriormente, se elaboraron dos cuestionarios, uno de autoevaluación y otro de coevaluación que el alumnado respondería una vez finalizado cada uno de los problemas seleccionados. En la autoevaluación, se pedía al alumnado que explicitara el método de resolución que había llevado a cabo paso a paso, que indicara si en algún momento había sufrido un bloqueo o atasco durante la resolución y cómo lo había solucionado. La primera pregunta responde a una necesidad de verbalizar explícitamente el proceso de resolución, una vez el problema está terminado, puesto que el alumnado tiende a verbalizar por escrito procesos que ha omitido durante la resolución del problema (TORREGROSA; DEULOFEU; ALBARRACÍN, 2019). La segunda pregunta responde a la necesidad de detectar posibles cambios de estrategia (VILLALONGA; DEULOFEU, 2015).

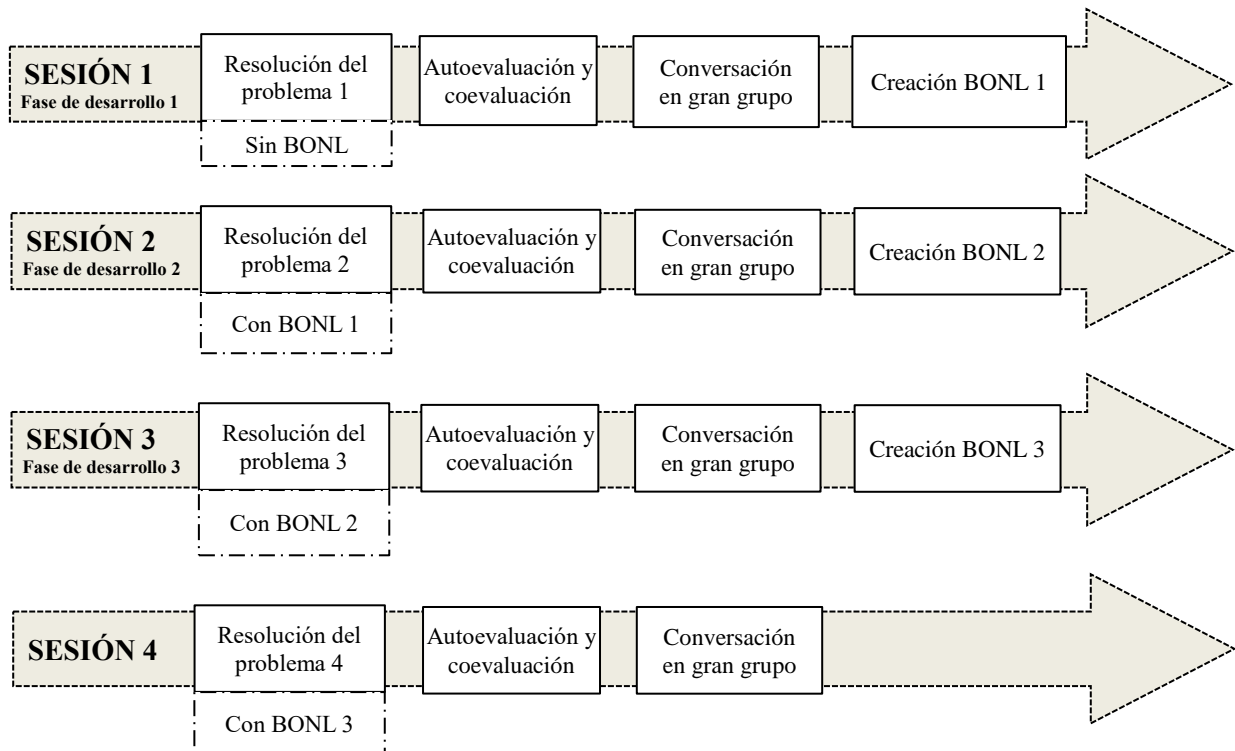
En la coevaluación, aparecían tres grupos de preguntas. En primer lugar, se pedía al alumno que explicara cómo su compañero había resuelto el problema paso a paso, y si consideraba que lo había resuelto correctamente. Esta primera pregunta responde a la necesidad de observar qué nivel de detalle existe en la resolución del compañero y si ésta resulta comprensible y acertada. En segundo lugar, se pedía al alumnado si consideraba que su compañero había sufrido un bloqueo o atasco y cómo lo había detectado. Esta segunda pregunta, al igual que en la autoevaluación, responde a una necesidad de detectar cambios de estrategia y

verbalización escrita de los procesos de autorregulación.

Por último, se pedía al alumno que anotase puntos fuertes de la producción evaluada así como aspectos a mejorar. Esta tercera pregunta responde a la necesidad de detectar destrezas y procesos que el compañero ha usado y que pueden ser útiles al resolutor o bien, pueden ser puntos a mejorar cara a la resolución del siguiente problema. Esta tercera y última pregunta es en la que más hincapié se hace en la conversación final posterior a la realización y evaluación de cada problema, ya que nos sirve para modificar la base de orientación no lineal de un problema a otro.

Como hemos comentado al inicio del apartado, el alumnado resolvió un total de cuatro problemas de lógica y patrones matemáticos con su correspondiente autoevaluación, coevaluación y conversación en gran grupo posterior a cada problema. Se llevaron a cabo un total de cuatro sesiones de dos horas de duración dedicando, para cada sesión, una hora de explicación y resolución del problema y una hora más para responder a la autoevaluación, coevaluación y conversación final en gran grupo. Para llevar a cabo la coevaluación se establecieron parejas heterogéneas y aleatorias con la finalidad de que el alumnado pudiera observar, compartir y discutir distintas estrategias de resolución (SANMARTÍ, 2010).

La conversación final desarrollada en cada una de las sesiones es la que permitía al alumnado modificar la base de orientación no lineal (BONL) a partir del proceso de resolución y evaluación llevado a cabo, haciendo especial énfasis en la última pregunta del cuestionario de coevaluación. El papel del docente en estas discusiones finales en gran grupo consistía en moderar las intervenciones del alumnado, recuperando las destrezas y procesos que señalaban y formular preguntas que permitieran al grupo decidir qué acciones añadían a la base. Así pues, atendiendo a los cuatro problemas planteados, la base sufrió tres modificaciones y nos referiremos a ellas como BONL 1, 2 y 3 (Figura 4).



**Figura 4** – Esquematación de la metodología llevada a cabo

Fuente: elaboración propia

#### 4 Análisis de datos

Los datos obtenidos los conforman las diferentes fases de desarrollo de la base de orientación no lineal elaborada por el grupo clase, las producciones escritas del alumnado de los cuatro problemas resueltos, así como los cuestionarios de coevaluación, que nos permiten justificar la aparición y/o cambio entre los ítems de las distintas fases.

Para poder responder a nuestro objetivo y, por lo tanto, describir y comparar las tres fases de desarrollo de la BONL elaborada por el alumnado, en primer lugar organizamos en formato de tabla comparativa las destrezas y procesos que aparecen en las tres fases de desarrollo para poder visualizar correctamente los cambios y modificaciones entre fases. Así pues, elaboramos una tabla de doble entrada en la cual cada columna pertenece a una fase de desarrollo y cada hilera a una destreza o proceso concreto (tal y como se visualizará en el Cuadro 3).

En primer lugar, seleccionamos aquellas producciones que mostraran por escrito la aparición y/o modificación de los procesos y destrezas (ítems) de cada fase de la BONL. Así pues, elaboramos un check-list concretando, para cada ítem de las distintas fases (sea proceso o destreza), cuatro posibles opciones:

- *Ítem no usado*: no observamos el uso de un determinado ítem puesto que el alumno

no lo verbaliza ni se intuye su uso en la resolución.

- *Ítem usado y observable*: el alumnado usa un determinado ítem puesto que lo expresa por escrito o bien se visualiza su uso durante la resolución.
- *Ítem usado pero no observable*: intuimos que el alumno ha usado un determinado ítem de la base pero no podemos asegurar su uso puesto que no lo verbaliza con exactitud o no se intuye con claridad.
- *No categorizado*: No podemos categorizar un determinado ítem por falta de información en la producción.

Posteriormente, categorizamos todas las producciones del alumnado atendiendo a la fase de desarrollo en la que se encontrara la base de orientación. Una vez categorizadas las producciones, seleccionamos aquellas que mostraran ítems usados y observables que son las que nos ejemplificaban cómo el alumnado usaba la BONL en cada fase de desarrollo.

En segundo lugar, seleccionamos aquellos cuestionarios de coevaluación en los que el alumnado detallaba, en la última pregunta (referente a puntos fuertes y débiles), procesos y destrezas que no aparecían en la fase actual de la BONL y que posteriormente, incluimos en la siguiente fase de desarrollo.

## 5 Resultados

Tal y como comentamos anteriormente, listar en formato tabla las diferentes fases de desarrollo de la BONL (Cuadro 3)<sup>1</sup> nos permite, por un lado, organizar los ítems de manera clara y ordenada y por otro lado, analizar los cambios y modificaciones de las distintas destrezas y procesos en relación a cuatro categorías: el formato y distribución de la base, el razonamiento y la planificación del problema, el método de resolución y por último, la explicitación del proceso de resolución y revisión.

	Ítems fase 1	Ítems fase 2	Ítems fase 3
<b>Entender</b>	Leer las veces que haga falta	Leer las veces que haga falta	Leo las veces que haga falta
	Sacar del enunciado lo que me distrae	Sacar del enunciado lo que me distrae	Quito del enunciado lo que me distrae
	Coger los datos importantes	Coger los datos importantes	Selecciono los datos importantes
	Coger la pregunta	Coger la pregunta	Selecciono la pregunta
		Dibujar para entender	Dibujo para entender (si hace falta) y miro el dibujo de diferentes maneras (horizontal, vertical y entero)

<sup>1</sup> El formato listado en cuadro corresponde a una necesidad comparativa, recordamos que la BONL mantiene su formato original en árbol ramificado.

			Organizo mentalmente la hoja (croquis)	
			Hago pruebas	
<b>Razonar y resolver</b>	Analizar y mirar con cuidado el problema	Analizar y mirar con cuidado el problema	<b>Razonar</b>	Reviso paso a paso antes de pasar al siguiente
	Razonar qué tengo que hacer	Razonar qué tengo que hacer		Razono qué tengo que hacer a partir de las pruebas que he hecho
	Hacer lo que me pide el problema	Hacer lo que me pide el problema		Busco un camino fácil o rápido para llegar a la solución
		Hacer cálculo mental	<b>Resolver</b>	Calculo mentalmente
		Dibujar para resolver		Explico el camino que he elegido para resolver el problema
				Explico las operaciones y dibujos
		Dibujo para resolver (si lo necesito)		
<b>Revisar</b>	Revisar los datos del enunciado	Revisar los datos del enunciado	Reviso los datos del enunciado	
	Revisar las operaciones	Revisar las operaciones	Reviso las operaciones	
	Revisar la respuesta	Revisar la respuesta	Reviso la respuesta y la marco en otro color, con un recuadro o círculo	
	Volver a leer el enunciado y lo que yo he hecho	Volver a leer el enunciado y lo que yo he hecho	Vuelvo a leer el enunciado y lo que yo he hecho	
		Dibujar para revisar	Dibujo para revisar y corroborar el proceso y la solución y miro que el dibujo continúe igual que el del enunciado	
			Reviso que haya explicado con detalle lo que hago y pienso	

**Cuadro 3** – Comparativa de las tres fases de desarrollo de la BONL elaborada por el grupo clase  
Fuente: elaboración propia

### 5.1 El formato y la distribución de la base

El primer aspecto que queremos destacar es la conjugación verbal usada por el alumnado. En las dos primeras fases, el alumnado usa los verbos en indicativo y la fase 3, la conjugación verbal cambia a presente. Por otro lado, también observamos que los verbos de acción usados en un lenguaje más coloquial – sacar o coger – cambian en la fase 3 a favor de verbos más específicos como quitar o seleccionar.

El segundo aspecto destacable entre las diferentes fases, es la división que experimentan los procesos razonar y resolver en la fase 3. Inicialmente, el alumnado concebía ambos procesos como uno solo. En la fase 1 observamos que los ítems incluidos en estos procesos son muy generales: analizar, razonar y hacer lo que me pide el problema. En la fase 2, se añaden destrezas matemáticas tales como hacer cálculo mental y dibujar, puesto que son las que el alumnado usa habitualmente. En la fase 3, observamos cómo los procesos revisar, razonar y buscar un camino, se diferencian de las destrezas referentes a ejecuciones concretas durante la resolución como:



calcular mentalmente, explicar el camino elegido y las operaciones, y dibujar si lo necesitan.

En el Cuadro 4 mostramos la resolución del problema 1 (Cuadro 4 - superior) y del problema 4 (Cuadro 4 – inferior) de una misma alumna donde se aprecia la necesidad de dividir las fases razonar y resolver en la fase 3.

<p>Interpretación: La alumna dibuja las mesas hasta llegar a 40 y 100 comensales respectivamente.</p>	
<p>[Para el caso de 4 hileras] He hecho algunas pruebas en el dibujo i he calculado mentalmente. He llegado a la conclusión de que si sumas 1 naranjo tienes la suma de dos pinos (1T = 2P) [encuentra la relación dos pinos por naranjo]. He contado los pinos de arriba y los de los lados y como son iguales [forma cuadrada] lo he multiplicado por dos [realiza dos operaciones, <math>7 \times 2</math> y <math>9 \times 2</math> y las suma].</p> <p>[Para el caso de 10 hileras] También he hecho algunas pruebas en el dibujo y he calculado mentalmente pero esta vez con 10 naranjos [hileras]. He multiplicado el número de pinos de arriba por 2 porque es igual que el de la izquierda [se refiere al otro ejemplo elaborado]. He hecho lo mismo con los de abajo [realiza tres operaciones <math>21 \times 2</math> y <math>11 \times 2 + 11 \times 2</math> y suma todos los resultados].</p>	

**Cuadro 4** – Problema 1 y problema 4 resueltos por la misma alumna  
Fuente: elaboración propia

Observamos que en el primer problema la alumna no verbaliza ningún tipo de planificación, simplemente, amplía el dibujo propuesto y realiza un recuento de mesas. En cambio, en el problema 4 la alumna explicita por escrito cómo ha planificado su resolución y cuál es la conclusión que obtiene al observar y analizar el dibujo antes de proceder a su resolución. Así pues, en el primer problema la alumna concibe las fases razonar y resolver como un único momento, mientras que en el cuarto problema se aprecia una distinción clara del razonamiento o planificación respecto a la resolución en sí misma, hecho que se corresponde con la fase 3 de la base.

## 5.2 El razonamiento y la planificación del problema

Dentro de los procesos razonar y resolver de la fase 3, hay dos ítems que merece la pena destacar. El primero de ellos es el ítem *razono qué tengo que hacer a partir de las pruebas que he hecho*. Encontramos que, en el primer y segundo problema que resolvió el alumnado, la

planificación de la acción o la fase razonar, aunque aparece en la base de orientación, era prácticamente inexistente en las resoluciones escritas. El alumnado tiende a resolver directamente el problema ampliando el dibujo propuesto como hemos observado en el cuadro 4 (superior). En el primer problema, sólo un alumno de los 25 del grupo lo resuelve usando la aritmética. En el cuatro problema, en el cual la base de orientación se encontraba en la fase 3, diecisiete de los 25 alumnos planifican qué deben hacer para proceder a resolver el problema aritméticamente. Este hecho nos muestra que las pruebas a las que se refiere el alumnado en la fase 3 de la base de orientación, promueven que planifiquen con antelación el método más eficaz que les lleva a desarrollar el ítem *busco un camino fácil o rápido para llegar a la solución*.

### 5.3 El método de resolución

En segundo ítem que merece la pena destacar es el referente al dibujo. En la fase 1 de la BONL, no aparece el ítem *dibujar para resolver* aunque 24 de los 25 alumnos usan el dibujo como método de resolución. La ausencia de este ítem nos muestra que el alumnado no concibe el dibujo como método de resolución al no estar familiarizado con la tipología de problemas que se les presenta (VILLALONGA; DEULOFEU, 2015). Posteriormente, en la fase 2, el ítem referente al dibujo aparece en indicativo – puesto que el alumnado ya lo ha usado en dos problemas como método de resolución –. El cambio más evidente se produce en la fase 3, donde aparece el condicional *dibujar para resolver (si lo necesito)*. Este hecho se produce porque el dibujo está estrechamente relacionado con el ítem *busco un camino fácil o rápido para llegar a la solución*.

El alumnado percibe que la resolución aritmética es más efectiva, rápida y eficaz que la ampliación del dibujo que, en muchos de los casos, es una ardua tarea, compleja y temporalmente costosa. Como hemos comentado anteriormente, el uso del dibujo disminuye a medida que aumenta la familiarización del alumnado con los problemas de lógica y patrones matemáticos.

En el momento en el que aparecen los métodos aritméticos, el ítem referente al dibujo queda en un plano condicional, sólo siendo usado en aquellos casos en los que el alumno no encuentra otro método de resolución más *fácil o rápido*. Además, observamos que el dibujo ya no sólo aparece en la fase de resolución, también aparece en la fase de comprensión y de revisión dado que el alumnado usa el dibujo para comprender el enunciado, para resolver el problema o para revisar la solución de otro modo (Cuadro 5).

<p>Interpretación: El alumno usa el dibujo para revisar el problema. Realiza un dibujo explicativo de los cálculos aritméticos que ha realizado.</p> <p>Traducción: Si fuesen 20 en cada lado se pondrían 20 personas (<math>20+20=40</math>) pero quedan más sitios [señala con asteriscos las puntas de las mesas] por eso tienen que ser 19 mesas.</p>	
---	--

**Cuadro 5** – Uso del dibujo en la fase de revisión

Fuente: elaboración propia

## 5.4 La explicitación del proceso de resolución y revisión

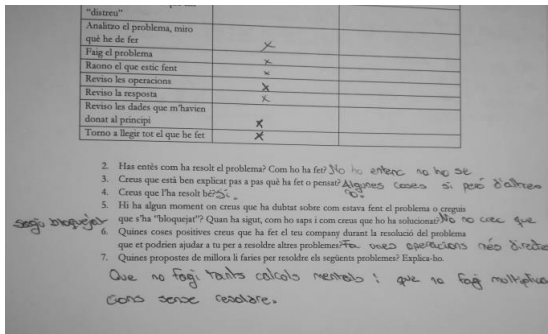
Por último, cabe destacar que en las fases 1 y 2 no aparece ningún ítem en referencia a la calidad de la explicación del problema. En cambio, en la fase 3, aparecen cinco ítems en relación a la revisión y detalle del proceso de resolución que se derivan de las respuestas que el alumnado dio en la última pregunta del cuestionario de coevaluación. El alumnado expresa puntos de mejora como la organización, la presentación o la revisión (Cuadro 6), dando lugar a la aparición de los ítems: *organizo mentalmente la hoja (croquis)*, *explico el camino que he elegido para resolver el problema*, *explico las operaciones y dibujos*, *reviso la respuesta y la marco en otro color con un recuadro o círculo y reviso que haya explicado con detalle lo que hago y pienso*.

<p>Traducción (P: pregunta; R: respuesta)                  P7: ¿Qué propuestas de mejora le harías para resolver los siguientes problemas? Explicálas                  R7: Que revise lo que ha hecho</p>	
---	--

**Cuadro 6** – Propuestas de mejora explicitadas en los cuestionarios de coevaluación

Fuente: elaboración propia

Encontramos que, generalmente, los alumnos expresan no comprender cómo el compañero ha resuelto el problema. A su vez, verbalizan sentirse perdidos durante la resolución a causa de no saber qué está pensando su compañero a medida que avanza en la resolución (Cuadro 7). De ahí la aparición de ítems arraigados al detalle y la verbalización del proceso y no sólo de la solución final.

<p>Traducción (P: pregunta; R: respuesta)</p> <p>P1: ¿Has entendido como ha resuelto el problema? R1: No entiendo, no sé cómo lo ha hecho</p> <p>P2: ¿Crees que está bien explicado paso a paso que ha hecho o pensado? R2: Algunas cosas las entiendo y otras no</p> <p>P7: ¿Qué propuestas de mejora le harías para resolver los siguientes problemas? Explícalas</p> <p>R7: Que no haga tantos cálculos mentales y que no haga multiplicaciones sin resolver</p>	
---	--

**Cuadro 7** – Dificultades de comprensión expresadas en el cuestionario de coevaluación  
Fuente: elaboración propia

## 6 Conclusiones

Al inicio del estudio, nos planteamos como objetivo: describir y comparar las distintas fases de desarrollo de una base de orientación no lineal desarrollada por un grupo clase de sexto de primaria. Una vez realizada la descripción y comparación, nos parece relevante discutir qué apreciación merecen los resultados.

En cuanto al formato y distribución de la base, hemos observado, en primer lugar, cambios sustanciales en cuanto al uso y terminología del vocabulario y conjugación verbal. Estos cambios nos muestran que a medida que el alumnado usa y evalúa la base de orientación no lineal, ésta toma significado para ellos (GARCÍA; SANMARTÍ, 1998). Al hacerla cada vez más propia, deciden cambiar la conjugación y uso de los verbos puesto que les ayuda a sentirse más identificados durante sus resoluciones.

En segundo lugar, atendiendo al razonamiento y la planificación del problema, la división que experimentan las fases razonar y resolver en la fase 3 nos muestra una toma de consciencia sobre el proceso de planificación que no suele darse en resolutores noveles (SCHOENFELD, 1992). El alumnado toma consciencia de la importancia del proceso de autorregulación (SCHOENFELD, 1989) y diferencia los procedimientos que puede realizar antes de ejecutar el método de resolución; como realizar probaturas o valorar qué camino le parece más fácil o rápido antes de ejecutarlo.

En cuanto a la explicitación del proceso de resolución y revisión, encontramos que los cuestionarios de coevaluación son los instrumentos que han potenciado la aparición de los cinco ítems referidos a la explicación y revisión del proceso (SANMARTÍ, 2019). Como comentamos en el apartado de diseño y método del estudio, el grupo clase participante no trabaja habitualmente la resolución de problemas matemáticos ni la coevaluación en el aula. Al trabajar en base a ejercicios, el alumnado no suele redactar ni explicitar detalladamente un proceso

complejo como es la resolución de un problema.

Este hecho dificultó en los dos primeros problemas las coevaluaciones, puesto que en gran parte de los casos el alumnado no escribía cómo resolvía el problema y por lo tanto, el compañero no comprendía ni el proceso, ni el método, ni la justificación del resultado final. En el tercer y cuarto problema, el alumnado ya conocía la mecánica a seguir en la coevaluación y tomó consciencia de la importancia de explicitar detalladamente las destrezas y procesos durante la resolución. En la fase de desarrollo final, aparece el ítem *reviso que haya explicado con detalle lo que hago y pienso*. Este ítem nos muestra la concepción final que tiene el alumnado del proceso de resolución, donde no sólo son explícitas las destrezas matemáticamente relevantes que realiza durante el proceso, sino también los procesos que tiene a nivel mental para justificar dichos pasos (GODINO; LLINARES, 2000).

En cuanto al método de resolución, observamos una evolución evidente entre el primer y último problema. Tal y como hemos mencionado en el apartado de resultados, el método de resolución general en el primer problema era la ampliación del dibujo propuesto (DEULOFEU; VILLALONGA, 2018). En cambio, en el último problema, observamos hasta tres métodos aritméticos distintos, más rápidos y eficaces dado el contexto de los problemas propuestos. Este hecho muestra un aprendizaje dentro del proceso de resolución de problemas de patrones matemáticos y además, nos indica que la coevaluación actúa como instrumento efectivo para compartir distintos métodos de resolución y no sólo como apoyo a la modificación de la base de orientación no lineal (SANMARTÍ, 2010).

A modo de cierre, señalamos que la base de orientación no lineal no sólo salva la linealidad establecida por la base de orientación de la acción (VILLALONGA; DEULOFEU, 2017) sino que también actúa como instrumento de autorregulación, potenciando que el alumnado estructure y verbalice procesos de resolución matemática y metacognitivamente complejos.

## Agradecimientos

Agradecemos a los grupos de sexto de primaria del centro les Corts de Barcelona, así como a la dirección y respectivos docentes, su colaboración en el presente estudio.

## Referencias

ARTZ, A. F.; ARMOUR-THOMAS, E. Development of a cognitive-metacognitive framework for protocol analysis of mathematical problem solving in small groups. **Cognition and instruction**, Washington, v. 9, n. 2, p. 137-175, 1992.

- CALLAHAN, L. G. Research report: Metacognition and school mathematics. **Arithmetic Teacher**, Reston, v. 34, n. 9, p. 22-23, 1987.
- CALLEJO, M. L.; ZAPATERA, A. Flexibilidad en la resolución de problemas de identificación de patrones lineales en estudiantes de educación secundaria. **Bolema**, Rio Claro, v. 28, n. 48, p. 64-88, 2014.
- CAMPANARIO, J. M.; OTERO, J. Más allá de las ideas previas como dificultades de aprendizaje: las pautas de pensamiento, las concepciones epistemológicas y las estrategias metacognitivas de los alumnos de Ciencias. **Enseñanza de las ciencias**, Barcelona, v. 18, n. 2, p. 155-169, 2000.
- CAVANAUGH, J. C.; PERLMUTTER, M. Metamemory: A critical examination. **Child development**, New York, v. 53, p. 11-28, 1982.
- CLARKE, D. The Problems of the Problem Solving Classroom. **Australian Mathematics Teacher**, Adelaide, v. 45, n. 3, p. 20-24, 1989.
- DEULOFEU, J.; VILLALONGA, J. Resolución de problemas y regulación del aprendizaje. **Educatio Siglo XXI**, Murcia, v. 36, n. 3, p. 153-176, 2018.
- FLAVELL, G. H. Metacognition and Cognitive Monitoring: A new area of psychological inquiry, **American Psychologist**, Washington, v. 34, n. 10, p. 906-911, 1979.
- GARCÍA, P.; SANMARTÍ, N. Las bases de orientación: un instrumento para enseñar a pensar teóricamente en biología. **Alambique: Didáctica de las Ciencias Experimentales**, Barcelona, n. 16, p. 8-20, 1998.
- GODINO, J. D.; LLINARES, S. El interaccionismo simbólico en educación matemática. **Educación matemática**, México, v. 12, n. 1, p. 70-92, 2000.
- GRUGNETTI, L.; JAQUET, F. A mathematical competition as a problem solving and a mathematical education experience. **The Journal of Mathematical Behavior**, New York, v. 12, n. 3-4, p. 373-384, 2005.
- JORBA, J.; SANMARTÍ, N. **Enseñar, aprender y evaluar: un proceso de regulación continua: Propuestas didácticas para las áreas de Ciencias de la Naturaleza y Matemáticas**. Madrid: Ministerio de Educación, 1996.
- LESTER, F. K.; GAROFALO, J.; KROLL, D. L. **The Role of Metacognition in Mathematical Problem Solving: A Study of Two Grade Sever. Classes. Final Report**. Washington: Indiana: Univ., Bloomington. Mathematics Education Development Center. National Science Foundation, 1989.
- MAYER, R. E. Implications of cognitive psychology for instruction in mathematical problem solving. En: SILVER, E. A. (ed.). **Teaching and learning mathematical problem solving**. Hillsdale: Lawrence Erlbaum, 1985. p. 123-145.
- NUNZIATI, G. Les objectifs d'une formation à/par l'évaluation formatrice. **Les cahiers pédagogiques**, París, n. 280, p. 47-65, 1990.
- POLYA, G. **How to solve it**. Princeton: Princeton University Press, 1945.
- PUIG, L. **Elementos de resolución de problemas**. Granada: Comares, 1996.
- SANMARTÍ, N. **Avaluar per aprendre. L'avaluació per millorar els aprenentatges de l'alumnat en el marc del currículum per competències**. Barcelona: Generalitat de Catalunya. Departament

d'Educació, 2010.

SANMARTÍ, N. **Avaluar y aprender, un único proceso**. Barcelona: Octaedro, 2019.

SCHOENFELD, A. H. Teaching mathematical thinking and problem solving. *En*: RESNICK, L.B.; KLOPFER, B.L. (ed.). **Toward the thinking curriculum**: Current cognitive research. Washington D.C: Association for Supervision and Curriculum Development, 1989. p. 83-103.

SCHOENFELD, A. H. Learning to Think Mathematically: Problem Solving, Metacognition, and Sense-making Mathematics. *En*: GROUWS, D. (ed.). **Research on Mathematics Teaching and Learning**. New York: Macmillan, 1992. p. 334-370.

SCHOENFELD, A. H. Problem solving in the United States, 1970–2008: research and theory, practice and politics. **ZDM**, Karlsruhe, v. 39, n. 5-6, p. 537-551, 2007.

SCHRAW, G.; DENNISON, R. S. Assessing metacognitive awareness. **Contemporary educational psychology**, Maryland, v. 19, n. 4, p. 460-475, 1994.

TALÍZINA, N. **Psicología de la enseñanza**. Moscú: Progreso, 1988.

TORREGROSA, A.; DEULOFEU, J.; ALBARRACÍN, L. Caracterización de procesos metacognitivos en la resolución de problemas de numeración y patrones matemáticos. **Educación matemática**, México, v. 32, n. 3, p. 39-67, 2020.

TORREGROSA, A., ALBARRACÍN, L., DEULOFEU, J. Estadios evolutivos de una base de orientación no lineal. **19 Jornadas para el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas. Actas JAEM 2019**. A Coruña: FESPM, 2020.

VILLALONGA, J.; DEULOFEU, J. La base de orientación en la resolución de problemas. *En*: SÁNCHEZ, P. A. (Ed.). **17 Jornadas para el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas. Actas JAEM 2015**. Cartagena: FESPM, 2015, p. 36.

VILLALONGA, J.; DEULOFEU, J. La base de orientación en la resolución de problemas: “Cuando me bloqueo o me equivoco”. **REDIMAT**, Barcelona, v. 6, n. 3, p. 256-282, 2017.

WILSON, J.; CLARKE, D. Towards the modelling of mathematical metacognition. **Mathematics Education Research Journal**, Melbourne, v. 16, n. 2, p. 25-48, 2004.

**Submetido em 11 de Março de 2020.  
Aprovado em 11 de Agosto de 2020.**