Dos conjuntos às alegorias

NÍLSON JOSÉ MACHADO

Os objetos matemáticos já representaram, através dos séculos, os mais diferentes papéis na constituição e na organização do conhecimento. Na antigüidade grega, uma tradição associada a Pitágoras procurou explicar o mundo a partir de referências a quantidades numéricas: a harmonia musical, o corpo humano, os corpos celestes, tudo poderia ser traduzido e representado por números e de tal representação extraíam-se, inclusive, argumentos para a plausibilidade das relações percebidas.

Em Platão, a célebre frase que ornamentava sua Academia — "Não entre aqui quem não conhecer Geometria" é um testemunho da confiança nos objetos e nas relações geométricas para representar o mundo sensível e suas articulações. O estatuto ontológico do mundo empírico platônico, no entanto, era reduzido ao de mera cópia ou realização imperfeita do mundo das idéias, constituído, em última instância, pelas idéias matemáticas, como a idéia de *círculo,* e as de natureza moral, como a idéia de *bem.*

Aristóteles restaura em parte a dignidade do mundo empírico, revigorando o significado do predicado, da qualidade, como contraponto para certa superestimação das relações numéricas, do quantitativo, presente em muitos de seus antecessores.

Particularmente no que tange à concepção de linguagem, Aristóteles distanciou-se sobremaneira das concepções pitagóricas e das platônicas, deslocando o centro de gravidade da representação e da justificação do conhecimento da segurança e da estabilidade da linguagem matemática para a riqueza e o movimento da língua grega.

De fato, em tal terreno é que se enraíza a lógica formal, que expressa fielmente as formas predicativas, as categorias delineadas pela língua grega. Tal deslocamento não significa, naturalmente, um banimento do quantitativo das elaborações aristotélicas: na verdade, em toda sua obra, Aristóteles entretece elementos associados ao trabalho do classificador, do caçador, do esculápio, do que valoriza, enfim, os sintomas, juntamente com outros elementos de raízes platônicas, como a tentação das formas fixas para as proposições ou os argumentos, ou da universalidade das categorias.

Os séculos XVII, XVIII e XIX

Existe um razoável consenso, no entanto, quanto a certo predomínio da qualidade sobre a quantidade na epistemologia aristotélica. Ressalvando-se aqui e ali exceções que apenas confirmam a regra, tal predomínio persistiu durante praticamente toda a Idade Média, desaguando no limiar da ciência moderna, quando despontam trabalhos como os de Galileu, Descartes, Locke, Leibniz, Newton, entre outros.

Embora em tais pensadores a força do qualitativo subsista, para transcender as concepções aristotélicas foi fundamental o recurso a certas idéias platônicas, assim como uma maior valorização das relações quantitativas.

Assim, a Geometria cartesiana ou o Cálculo de Newton ou de Leibniz, não obstante apresentem-se, segundo os olhos dos séculos seguintes, eivados de qualidades inexplicáveis ou desnecessárias, caminham para uma progressiva assepsia, com o predomínio crescente dos aspectos quantitativos.

Em Kant, já no século XVIII, entrelaçam-se e amalgamam-se elementos qualitativos e quantitativos de uma forma fecunda e original. Por um lado, as categorias kantianas significam um retorno às intenções predicativas aristotélicas; por outro, seu importante ensaio sobre o uso das magnitudes negativas na Filosofia (Kant, 1992) parece um indício veemente do fascínio exercido pelos aspectos quantitativos do conhecimento.

No século XIX, os grandes sucessos da matematização da Física, com Fourier e a Teoria do Calor, ou Maxwell e as equações do Eletromagnetismo, contribuíram decisivamente para a fixação de uma imagem de onipotência das relações numéricas e funcionais, com o predomínio das quantidades sobre as qualidades. A frase platônica sobre os poderes da Geometria transfigura-se, então, na máxima de Rutherford – *Qualitative is nothing but poor quantitative.*

As pretensões de irredutibilidade entre o qualitativo e o quantitativo, ou de hegemonia de um dos membros do par, constituem elementos de um cenário em que se desenharão duas vertentes extremamente fecundas para a problematização das relações entre os objetos matemáticos e a constituição do conhecimento: por um lado, uma radicalização na distinção entre ciências *humanas* e ciências *exatas* surge associada a certa tentativa de legitimação da dualidade qualidade/quantidade, conduzindo a diferenciações supostamente paradigmáticas, como a relativa aos pares *explicação*/ciências *exatas*, *compreensão*/ciências *humanas*; por outro lado, no interior da Matemática, a emergência da

Teoria dos Conjuntos, na segunda metade do século XIX, fornece os ingredientes básicos para uma aproximação até então insuspeitada entre o qualitativo e o quantitativo, favorecendo o grande desenvolvimento de uma Matemática *qualitativa* cuja irradiação para as ciências constituídas ou em desenvolvimento não tardou a ocorrer.

Abdicar-se-á, aqui, de uma análise mais demorada da primeira das vertentes, para uma concentração de esforços no exame das possibilidades e dos limites da Teoria dos Conjuntos na constituição da Matemática, das Ciências e no próprio funcionamento da linguagem natural. Buscar-se-á também uma análise de instrumentos mais abrangentes, elaborados enquanto objetos matemáticos posteriormente à Teoria dos Conjuntos, como as Estruturas, as Categorias, as Alegorias, que podem ter um significado importante na construção, na organização e na justificação do conhecimento.

Conjuntos, Estruturas, Categorias

Inicialmente, é bom que se registre, a despeito do otimismo acentuado de muitos matemáticos no que tange ao papel a ser desempenhado pela Teoria dos Conjuntos como linguagem unificadora da Matemática e na fundamentação axiomática das Ciências em todas as áreas e em todas as etapas de seu desenvolvimento, que tal expectativa nem de longe parece consensual. A razão básica é que tal teoria permanece tributária de uma ontologia demasiadamente estreita: os elementos de um conjunto, caracterizados por um único predicado, são objetos claros, distintos, perfeitamente definidos, esgotando-se no âmbito de uma única relação, a de pertinência.

Uma análise especialmente interessante das limitações da Teoria dos Conjuntos, criada por Cantor na segunda metade do século XIX, é realizada por Castoriadis (1987, v.2). Segundo Cantor, "um conjunto é uma reunião em um todo de objetos definidos e distintos de nossa intuição ou de nosso pensamento. Esses objetos são denominados os elementos do conjunto" (*Apud* Castoriadis, 1987, v.2:395).

A possibilidade da consideração de objetos *definidos* e *distintos* em universos menos assépticos do que o matemático sempre revelou-se problemática. Uma frase do próprio Cantor, em carta enviada a Dedekind (28 jul. 1899) serve de mote para as considerações de Castoriadis: "toda multiplicidade é ou uma multiplicidade inconsistente ou um conjunto" (*Apud* Castoriadis, 1987, v.2:394).

Ocorre que justamente essas *multiplicidades inconsistentes* do ponto de vista da lógica formal são de grande interesse no mundo humano, constituindo a regra no universo das significações sociais; a elas, então, o filósofo dedica sua atenção, não ignorando, o que seria absurdo, a dimensão conjuntista da linguagem, mas evidenciando suas limitações intrínsecas do ponto de vista da ontologia subjacente.

Com o advento das Estruturas, ocorre um primeiro movimento importante no sentido de associar-se aos objetos matemáticos uma ontologia mais rica. De fato, num primeiro momento, ocorre uma ampliação significativa no espectro de tais objetos: números, grandezas, figuras, passam a dividir as atenções com vetores, matrizes, permutações, proposições etc; tais novos objetos passam a constituir sistemas, caracterizados por propriedades, por feixes de relações; posteriormente, os próprios sistemas multiplicam-se, transfiguram-se, sem perder suas características básicas, suas propriedades fundamentais, ocorrendo, então, um notável deslocamento das atenções dos objetos para as relações constitutivas.

De fato, uma estrutura é um conjunto onde os elementos estão relacionados através de uma, às vezes, duas operações, que apresentam certas propriedades muito simples, como o fechamento ou a associatividade, por exemplo. Tais operações articulam entre si os elementos do conjunto, de modo a compor uma totalidade com nível de organização superior ao de um simples conjunto, no qual tudo o que se exige de um objeto é uma prontidão absoluta na resposta à questão da pertinência.

A noção de estrutura enquanto objeto matemático desenvolveu-se intensamente no interior da Matemática e frutificou nos mais variados terrenos, como os da Lingüística, da Antropologia, da Física, da Filosofia, entre outros, sobretudo nas décadas de 50 e 60. Lévi-Strauss e suas estruturas de parentesco, ou dos mitos, constitui apenas um exemplo, ainda que notável, do poder de sedução de tal objeto.

O enriquecimento das relações características de uma estrutura, tanto no que se refere à natureza das operações quanto no que tange às propriedades a que deviam satisfazer, conduziu a uma progressiva complexidade das mesmas e a certa classificação/hierarquização desses objetos a partir de estruturas básicas, consideradas por Bourbaki como estruturas-mãe, como são as estruturas algébricas, as estruturas de ordem e as estruturas topológicas, desenvolvendo-se uma grande variedade de formas no âmbito de cada tipo.

Esse florescimento da noção de estrutura, que tem em seu cerne o deslocamento das atenções do ser enquanto *essência* para os objetos articulados por sistemas de relações, subjaz à disseminação dos *estruturalismos* de todos os quilates nas mais variadas áreas e conduziu, no interior da Matemática, a uma espécie de *teoria das estruturas*. Nesta, a meta passa a ser o estabelecimento de relações gerais, que vigem em diferentes estruturas, independentemente dos objetos que articulam. Não é outro o caminho que conduz à emergência da Teoria das Categorias, a partir dos anos 60.

Com as Categorias, ocorre, então, um deslocamento decisivo nas atenções dos entes para as relações; à medida em que têm por objetos as estruturas matemáticas, os próprios objetos passam a ser constituídos por sistemas de relações. Isto conduz à emergência de uma fecunda dualidade entre objetos e relações.

De fato, numa categoria há objetos e há relações, que são os morfismos, mas os objetos podem ser perfeitamente caracterizados pelo feixe de relações nele incidentes ou dele emergentes. É mesmo possível afirmar-se que bastam os morfismos para caracterizar uma categoria, algo equivalente a dizer-se *dize-me que transformações realizas e te direi que categorias utilizas;* as mais modernas definições de categoria explicitam apenas as características dos morfismos correspondentes.

A riqueza da teoria das categorias, quando comparada com a da teoria dos conjuntos, conduziu a maior parte dos matemáticos a considerá-la uma extensão natural da linguagem conjuntista, fazendo-a depositária de todas as expectativas de unificação da Matemática através da universalização da linguagem que utiliza. Paralelamente, desenvolveram-se noções como as de feixe ou de topos, dedicadas a dar respostas a agudas questões relacionadas com a passagem de resultados locais a resultados globais, no âmbito das relações, ou à possibilidade de formalização da idéia de algo como uma *estrutura variável,* no âmbito dos sistemas. Tais noções, no entanto, ainda se encontram muito distantes de uma utilização expressiva fora das searas técnicas das quais emergiram.

Piaget e as Categorias

Como já ocorrera com os Grupos e as Estruturas em geral, no caso das Categorias, é novamente no âmbito do referencial piagetiano que surgem as tentativas pioneiras de exploração do novo objeto externamente ao terreno matemático, na constituição/organização do conhecimento.

De fato, se o desenvolvimento da álgebra ocorrido nos anos 30 inspirou os primeiros trabalhos piagetianos, conduzindo-o a situar a estrutura de grupo no centro de suas atenções e atividades, se os trabalhos do grupo Bourbaki, nos anos que sucederam a Segunda Guerra

Mundial, privilegiando a noção de estrutura como instrumento fundamental na própria arquitetura da Matemática, tornaram Piaget um *estruturalista* convicto, seria, talvez, previsível, sua adesão entusiástica ao novo instrumento, que surge como uma generalização natural da noção de estrutura, como uma teoria geral das estruturas.

No âmbito do referencial piagetiano, é significativa a contribuição de Papert para o deslocamento das atenções das estruturas para as categorias. Seu artigo *Structures et Catégories* (1969) é fecundo e esclarecedor, tanto no que se refere ao conteúdo examinado quanto no que tange ao esclarecimento sobre o fato de o interesse de Piaget pelo tema ser conseqüência natural das pressuposições básicas de sua epistemologia genética.

Lamentavelmente, não restou muito tempo ao mestre genebrino para a exploração da nova seara; tendo falecido em 1980, apenas dez anos depois, na Suíça, é publicada uma coletânea de trabalhos de Piaget e de quase duas dezenas de seus colaboradores, na qual a noção de categoria ocupa a posição central, explicitando-se de modo claro e convincente sua natural vinculação com a epistemologia genética. Em *Morphismes et Catégories,* um novo ciclo de atribuições de significados aos objetos matemáticos na representação e na justificação do conhecimento parece ter início. Em especial, o capítulo intitulado *Teoria das Categorias e Epistemologia Genética* é lúcido e equilibrado, devendo tornar-se leitura básica de todos os que se pretendem piagetianos. Nele, Ascher afirma: "Eu tentei tornar plausível – em grandes linhas – a idéia de que a teoria das categorias, considerada como teoria das construções matemáticas, reflete a constituição genética dos instrumentos cognitivos humanos: o desligamento de esquemas transferíveis de um conjunto de ações, seguido de operações semelhantes sobre esses esquemas, seguidas de operações sobre esquemas de esquemas e assim por diante" (1990:217).

Categorias, Alegorias

Coincidentemente, no mesmo ano em que é publicado *Morphismes et Catégories,* ocorre no interior da Matemática o que parece ser um novo salto qualitativo, com a entrada em cena da noção de Alegoria, uma generalização da noção de categoria elaborada por Freyd e Scedrov (1990).

Em uma alegoria também existem objetos e relações; essas, no entanto, enquanto instrumentos correlatos aos morfismos, deixam de representar necessariamente funções, ou seja, de ter necessariamente uma orientação da *origem* para a *extremidade,* passando a constituir elos, arcos de ligação, relações em sentido mais amplo. Em outras palavras, numa alegoria, os objetos constituem feixes de relações que incorporam as relações funcionais, ou as causais, mas que incluem também interações de outros tipos, como as relações analógicas, ou mais genericamente, associações do tipo *dizer B para significar A,* sem que se afirme que *A implica B* ou que *B implica A*.

Convém notar que, no percurso dos conjuntos às alegorias enquanto objetos matemáticos para a representação do conhecimento, paralelamente ao enriquecimento das técnicas, houve considerável transformação na ontologia subjacente à utilização dos correspondentes objetos, resultante tanto do progressivo deslocamento das atenções dos entes para as relações, quanto do fecundo alargamento da noção de relação.

Ainda que possa ser associada a processos inconscientes, de um ponto de vista filosófico, ou a um efeito não planejado, do tipo *serendipty,* a ampliação no significado do termo *relação* parece extremamente importante do ponto de vista epistemológico. Provavelmente, tal alargamento teria impedido Jung, um mestre do pensamento analógico, de afirmar, de forma tão magoada e contundente, que a Matemática não teria a ver com o desenvolvimento do raciocínio lógico; no quadro conceitual junguiano, o lógico parecia excluir o analógico.

No caso específico das alegorias, as repercussões de tal objeto fora do âmbito da Matemática ainda não são suficientemente visíveis, ou são praticamente inexistentes. Alguns de seus aspectos mais desafiadores são o reexame da noção de causalidade e o desenvolvimento da concepção de conhecimento como rede de significações, como alternativa para as cadeias causais, mesmo as que se disfarçam em árvores ou estruturas hierárquicas.

Do ponto de vista epistemológico, uma perspectiva menos otimista na análise da importância do percurso dos conjuntos às alegorias como instrumentos matemáticos para a representação do conhecimento, a despeito do enriquecimento ontológico já referido, sugere a existência de uma vinculação estreita entre a linguagem categórica — ou alegórica — e a linguagem conjuntista, da qual as outras permaneceriam tributárias. Tal ponto de vista parece relevante e mereceria uma análise cuidadosa.

Alegorias: alternativas

De modo mais freqüente, no entanto, surgem diversos focos de críticas relativamente às possibilidades e aos limites da matemática conjuntista na constituição das Ciências e no funcionamento da linguagem natural. Tais críticas, no entanto, deveriam levar em conta um quadro epistemológico mais atualizado, assimilando os desdobramentos naturais da linguagem conjuntista, como são as categorias ou as alegorias; freqüentemente não o fazem.

É comum, então, o surgimento de objetos alternativos, aparentemente fecundos, para a representação do conhecimento, mas que pagam um alto preço, sobretudo em termos operacionais, pela ignorância dos novos objetos matemáticos. Esses objetos alternativos, em decorrência de tal ignorância, internamente à Matemática, talvez não sejam levados suficientemente a sério; externamente a ela e sem o seu apoio, em razão de uma inevitável complexidade, talvez não sejam suficientemente compreendidos.

No que se refere às críticas à linguagem conjuntista, um exemplo vigoroso é o de Castoriadis (1987), em *As encruzilhadas do labirinto*. De seu trabalho, surge com força a interessante noção de magma, elaborada para a representação de objetos do conhecimento que não se esgotam em conjuntos, como seriam, por exemplo, as significações sociais.

Para Castoriadis, um magma é um objeto caracterizado pelas seguintes propriedades:

"M1: Se M é um magma, pode-se identificar em M um número indefinido de conjuntos.

M2: Se M é um magma, pode-se identificar em M outros magmas diferentes de M.

M3: Se M é um magma, não existe partição de M em magmas.

M4: Se M é um magma, toda decomposição de M em conjuntos deixa como resíduo um magma.

M5: O que não é um magma ou é um conjunto ou não é nada" (p.404).

As fecundas considerações de Castoriadis mereceriam uma análise atenta, tanto por parte de matemáticos como por parte de não-matemáticos. Seria interessante tentar-se uma articulação mais consistente entre suas críticas e os recursos associados aos objetos matemáticos mais recentemente desenvolvidos, alguns deles com origem posterior à maior parte dos trabalhos de Castoriadis. Particularmente no que se refere à natureza dicotômica da definição de magma, caracterizado sinteticamente como um não-conjunto, parece possível preencher uma parte substantiva do abismo que se supõe existir entre magmas e conjuntos recorrendo-se a objetos matemáticos como feixes, topoi, categorias, alegorias, entre outros.

Conhecimento como Rede

Não parece inteiramente razoável, no entanto, alimentar-se expectativas excessivamente otimistas com relação a um reconhecimento natural das possibilidades epistemológicas desses novos objetos matemáticos; sem uma transformação correlata na concepção de conhecimento que subjaz à organização escolar ou acadêmica, tais instrumentos podem permanecer adormecidos como sofisticados computadores, utilizados apenas como máquinas de escrever.

De fato, juntamente com o desenvolvimento dos novos instrumentos de representação do conhecimento, é necessário reelaborar a própria concepção de conhecimento, desviando-a mais e mais de balizas como conjuntos bem definidos, classificações estáveis, árvores ou estruturas hierárquicas imutáveis, cadeias causais linearmente condicionadas e aproximá-la decisivamente de um novo paradigma, qual seja, o de uma rede em um espaço de representações.

Em *As tecnologias da inteligência,* Lévy (1993) caracteriza três tempos, três dimensões das tecnologias da informação, que se superpõem, coexistem, entrelaçam-se e interagem continuamente: a oralidade, cuja imagem geométrica é o círculo; a escrita, que tem como representação a linha reta; e o hipertexto, uma síntese de recursos e significações múltiplas, multiplamente entrelaçadas, cuja imagem representativa é a de uma rede.

A partir de tal rede de significações, constituída de nós e conexões, onde um nó é resultante da conexão de diversos fios e as conexões são caracterizadas pela referência aos nós que interligam, elabora-se operacionalmente a diluição dos objetos em relações e, reciprocamente, a consubstanciação de relações em objetos.

Assim, à medida que perde força a distinção nítida entre objetos e relações, configura-se com mais clareza certa dualidade entre os elementos desse par, na qual os objetos são percebidos/concebidos como feixes de relações e feixes de relações são transformados em novos objetos; as relações são determinadas por pares de objetos e cada objeto é caracterizado pelas relações nele incidentes ou dele emergentes.

O reconhecimento de tal dualidade parece absolutamente fundamental para uma caracterização mais nítida das relações entre o concreto e o abstrato no processo de construção do conhecimento. É possível que o próprio Marx tenha vislumbrado isso, ao afirmar que o concreto é concreto por ser uma síntese de múltiplas determinações.

Conseqüências pedagógicas

No terreno de tais concepções, germinam sementes de um grande número de temas de natureza pedagógica, como são as elaborações curriculares, a organização do trabalho escolar, o planejamento da ação docente, os processos de avaliação. Disciplinas, interdisciplinaridade, valores, avaliação, tecnologias, inovações são temas permanentemente tributários de uma concepção de conhecimento. Um exemplo candente de como uma tal concepção sobressai no cenário educacional são as freqüentes declarações de adesão ao *construtivismo,* em geral desprovidas de contrapontos legitimadores ou carentes de uma fundamentação mínima.

Um programa de pesquisa que busque explicitar concepções de conhecimento que subjazem ao trabalho escolar, associadas aos objetos matemáticos que as representam e articuladas com as correspondentes ações de natureza pedagógica, poderá ter um significado pedagógico profundo.

Em passado recente, falar-se de alegorias em matemática significava apenas a eventual utilização do sentido figurado como um recurso didático para a compreensão de seus objetos; hoje, as alegorias constituem sofisticados objetos matemáticos que permitem a quem os manuseia a caracterização de teorias formais como alegorias (Freyd & Scedrov, 1990:275) ou a referência a resultados como o *teorema da metonímia* (*ibid.*:246).

Paulatinamente, cresce a percepção de que objetos matemáticos considerados complexos e *abstratos,* como categorias ou alegorias, constituem instrumentos muito mais adequados do que os insípidos conjuntos para a representação do conhecimento em qualquer área. Na mesma medida, deve sedimentar-se a concepção epistemologicamente fecunda de que a persistência e a continuidade na elaboração do conhecimento não conduzem a um distanciamento crescente, mas significam, efetivamente, uma progressiva aproximação da realidade.

Referências Bibliográficas

CASTORIADIS, Cornelius. *As encruzilhadas do labirinto* (3 v). Rio de Janeiro, Paz e Terra, 1987.

FREYD, Peter & SCEDROV, Andre. *Categories, allegories.* Amsterdam, North Holland, 1990.

GARDNER, Howard. *Multiple intelligences.* New York, Basic Books, 1993.

KANT, Immanuel. *Opúsculos de filosofia natural.* Madrid, Alianza Editorial, 1992.

LÉVY, Pierre. *As tecnologias da inteligência.* Rio de Janeiro, Editora 34, 1993.

PAPERT, Seymour. Structures et catégories. In: *Logique et connaissance scientifique. Enciclopédie de la Pléiade.* Paris, Gallimard, 1969.

PIAGET, Jean *et alii. Morphismes et catégories.* Paris, Delachaux & Niestlé, 1990.

THOM, René. Qualidade/quantidade. In: *Dialéctica. Enciclopédia Einaudi,* v.10. Porto, Imprensa Nacional/Casa da Moeda, 1985.

Resumo

O autor discute o significado da utilização de objetos matemáticos na representação do conhecimento. Começando com os números, passa sucessivamente a outros instrumentos formais, como conjuntos, estruturas, categorias, e um novo objeto matemático proposto por Freyd & Scedrov (1990), as alegorias. Sugere que, neste percurso, o crescimento no nível de abstração dos objetos não conduz necessariamente a um distanciamento crescente, mas significa, pelo contrário, uma progressiva aproximação da realidade.

Abstract

The Author discusses the meaning of the use of mathematical objects in representing knowledge. Starting with numbers, he examines sucessively others formal instruments, such as sets, structures, categories, and allegories, a new object proposed by Freyd & Scedrov (1990). This way, he suggests that the growth of the abstraction level does not presuppose a necessary progressive disconnection from reality; quite the contrary, it provides an increasing contact with it.

Nílson José Machado é professor da Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo e professor-visitante do Instituto de Estudos Avançados da USP no Programa Educação Para a Cidadania.